

Először megmutatjuk, hogy két kör nem elég a lefedéshez. Egy 1-nél kisebb sugarú kör, ha két pontban metszi az egységgörte, területének kevesebb, mint a felét tudja lefedni, hiszen a két kör metszéspontjainak távolsága kisebb az egységgörte átmérőjénél. Ha viszont a két (egymást nem tartalmazó) körnek legfeljebb egy közös pontja van, akkor a kisebb kör legfeljebb egy pontot fed le.

Három kör viszont már elegendő. Az egységgörtebe írt szabályos háromszög oldalai mint átmérők fölé írt körök lefedik az egységgörte (1. ábra). Tehát legkevesebb három lefedő körre van szükség.

Az 1. ábra szerinti esetben a lefedő körök sugara  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ha három, ennél kisebb sugarú kört veszünk, a lefedés nem sikerül, mert egy-egy kör az egységgörte területének kevesebb mint a harmadát fed le. Ezért a három egybevágó lefedő kör sugara legalább  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Rudolf Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) és Terék Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.)

*Megjegyzések.* 1. Megmutatható, hogy nemcsak a 2 egység átmérőjű kör, hanem tetszőleges, legfeljebb 2 egység átmérőjű síkbeli ponthalmaz lefedhető három  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  sugarú körrel. Ennek igazolásához fölhasználjuk a következő tételt:

Minden legfeljebb  $d$  átmérőjű síkbeli ponthalmaz lefedhető egy  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  oldalú szabályos hatszöggel. Ennek a tételnek a bizonyítása konvex tartományra – Pál Gyula tételeként – megtalálható Reiman István: A geometria és határterületei c. könyve 295–296. oldalán. E tétel ismeretében csak azt kell belátnunk, hogy a  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  oldalú szabályos hatszög lefedhető

három  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  sugarú körrel. A 2. ábrán az  $E, F, G$  pontok egy  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  oldalú szabályos hatszög három oldalának felezőpontjai.

Nyilván az  $EFG$  háromszög szabályos, és oldalának hossza  $\sqrt{3}$ . A 2. ábra alapján láthatjuk, hogy e háromszög oldalaira mint átmérőkre illesztett körök lefedik a hatszöget, és a hatszöggel lefedett 2 átmérőjű alakzatot is.

2. Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.) a következő általánosítási lehetőségre mutatott rá: Tekintsünk kör helyett egy tetszőleges  $F$  korlátos és konvex síkidomot.  $F$ -et hozzá középpontosan hasonló  $m$  darab kicsinyített, nem feltétlenül egybevágó alakzattal szeretnénk lefedni. Mi lesz az  $m$  pozitív egész legkisebb értéke? Feladatunk ennek az I. C. Gohberg és A. Sz. Markusz által 1960-ban kitűzött problémának speciális esete, amikor is az  $F$  alakzat kör. Ekkor az  $m$  minimuma 3.

Az említett szerzők bebizonyították, hogy az  $m$  szám legkisebb értéke paralelogramma esetén 4, minden egyéb korlátos konvex  $F$  síkidomra 3. Az elemi, de mégis eléggé hosszadalmas bizonyítás megtalálható V. G. Boltjanskij–I. C. Gohberg: Alakzatok felbontása kisebb részekre című könyvének 53–64. oldalán.

A feladat második részére, vagyis hogy legalább mekkora lefedő alakzatokat kell alkalmaznunk, amikor  $m$  a legkisebb, nem lehet ilyen egyszerűen válaszolni, a válasz függ a konvex síkidom alakjától.

