I. megoldás. Legyen AB, illetve CD felezőpontja E, illetve F. Ismeretes, hogy ha az a, b, c oldalú háromszögben a c-hez tartozó súlyvonal s_c, akkor $2a^2+2b^2=c^2+4\cdot s_c^2$ (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye II. 291. feladat). Alkalmazzuk ezt az elfajuló háromszögre is érvényes összefüggést az ABC, ABD és ECD háromszögekre:

$$2AC^2+2BC^2=AB^2+4CE^2, 2AD^2+2BD^2=AB^2+4DE^2, 2CE^2+2DE^2=CD^2+4EF^2.$$

Az első két egyenlőség $\dfrac{1}{2}$-szeresét és a harmadik egyenlőséget összeadva, majd mindkét oldalból $2CE^2+2DE^2$-et kivonva:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2=AB^2+CD^2+4EF^2,$$

amiből $4EF^2\geq 0$ miatt következik a feladat állítása. Egyenlőség $EF=0$ esetén lesz, azaz, ha AB és CD felezik egymást. Ekkor $ACBD$ – a pontoknak ebben a sorrendjében – egy (esetleg elfajuló) paralelogramma csúcsai.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Legyenek a tér egy tetszőleges pontjából az A, B, C, D pontokhoz vezető vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Mivel pl. $AC^2=\left(\overrightarrow{AC}\right)^2=(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2$, a következö írható:

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2-AB^2-CD^2=$$
$$(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{d}-\mathbf{b})^2+(\mathbf{d}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2-(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2-(\mathbf{d}-\mathbf{c})^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d})^2\geq 0,$$

ami a feladat állítását jelenti. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d}=\mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{a}-\mathbf{c}=\mathbf{d}-\mathbf{b}$, tehát $ABCD$ egy (esetleg elfajuló) paralelogramma.

Prause István (Budapest, Piarista Gimn., III. o.t.)