

Az  $ABC$  háromszög  $A$ -ból induló magassága legyen  $m_a$ , a beírt kör sugara  $r$ . Használjuk az *ábra* további jelöléseit. Mivel  $C_2B_3 \parallel BC$ , az  $AC_2B_3$  háromszög és az  $ABC$  háromszög hasonlóak. Ezért  $\frac{C_2B_3}{a} = \frac{m_a - 2r}{m_a}$ , amiből  $C_2B_3 = a \left(1 - \frac{2r}{m_a}\right)$ . Ismeretes, hogy  $r = \frac{t}{s} = \frac{a \cdot m_a}{2s}$ , és így  $\frac{2r}{m_a} = \frac{a}{s}$ . Ezért  $C_2B_3 = a - \frac{a^2}{s}$ .

Hasonlóan  $A_2C_3 = b - \frac{b^2}{s}$ , és  $B_2A_3 = c - \frac{c^2}{s}$ . A hatszög középpontosan szimmetrikus, ezért kerülete:

$$K = 2(C_2B_3 + A_2C_3 + B_2A_3) = 2 \left( a + b + c - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} \right).$$

Azt kell bebizonyítanunk, hogy  $2 \left( a + b + c - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} \right) \leq \frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c}$ . Némi számolás után azt látjuk, hogy ez ekvivalens a  $0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$  egyenlőtlenséggel, ami nyilván igaz.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

*Bérczi Gergely* Szeged, Ságvári E. Gimn., II.o.t.

*Szabó Jácint* Győr, Révai M. Gimn., III.o.t.

*Megjegyzés.* Legyen a hatszög területe  $T$  és kerülete  $K$ , a háromszögé  $t$ , illetve  $k$ . Szabó Jácint megállapította, hogy  $T = t \left( 2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s^2} \right)$ , továbbá  $\frac{T}{t} = \frac{K}{k} \leq \frac{2}{3}$ . Az utóbbi relációban egyenlőség pontosan akkor lesz, ha a háromszög szabályos. Ez pl. azt is jelenti, hogy a hatszög akkor fedi le a háromszög területének legnagyobb hányadát – számszerűen a kétharmadát – ha a háromszög egyenlő oldalú.

