

**I. megoldás.** Az 1. ábra hasonló háromszögeiből  $\frac{a}{x} = \frac{m_a}{m_a - x}$ , és ebből  $x = \frac{a \cdot m_a}{a + m_a}$ . Ezután  $\frac{a}{x} = \frac{a + m_a}{m_a} = 1 + \frac{a}{m_a}$ . A háromszög területe  $t = \frac{a \cdot m_a}{2}$ , így  $\frac{a}{x} = 1 + \frac{a^2}{2t}$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $\frac{b}{y} = 1 + \frac{b^2}{2t}$  és  $\frac{c}{z} = 1 + \frac{c^2}{2t}$ . Ezért a bizonyítandó állítás:

$$1 + \frac{a^2}{2t} + 1 + \frac{b^2}{2t} + 1 + \frac{c^2}{2t} \geq 3 + 2\sqrt{3},$$

azaz  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4t\sqrt{3}$ . Ehelyett elegendő azt bizonyítani, hogy

$$(1) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 16 \cdot t^2 \cdot 3.$$

Ezt a következőképpen igazolhatjuk. A koszinusztétel szerint

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \text{amiből} \quad \sin^2 \gamma = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2},$$

a háromszög területének négyzete pedig

$$t^2 = \frac{a^2b^2}{4} \left[ 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} \right] = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3 \left[ 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \right].$$

Ebből néhány átalakítással

$$(2) \quad (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0,$$

ami nyilvánvalóan fennáll. Mivel egyenlőtlenségeink egymással ekvivalensek, a feladat állítását igazoltuk. (2)-ben, és a bizonyítandó egyenlőtlenségben is pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha  $a = b = c$ , tehát szabályos háromszög esetén.

*Pápay Mihály* (Szolnok, Versegly F. Gimn., IV. o.t.) és *Zábrádi Zoltán* (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o.t.)

**II. megoldás.** Az 1. ábra jelöléseivel  $a = BE + EF + FC = x(1 + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma)$ , tehát  $\frac{a}{x} = 1 + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma$ . Hasonlóan kapjuk:  $\frac{b}{y} = 1 + \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \gamma$ ,  $\frac{c}{z} = 1 + \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta$ . A három egyenletet összeadva:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 3 + 2(\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma).$$

A kotangens egyenlőtlenség szerint

$$(3) \quad \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma \geq \sqrt{3},$$

amiből már következik a feladat állítása.

A (3) egyenlőtlenséget a következőképpen igazolhatjuk. Mivel a feladat szigorú „beírás” előírása szerint a négyzetcsúcsok az oldalakra illeszkednek, a háromszög szögeire  $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$ . Mivel a  $\text{ctg } x$  függvény a  $(0; 90^\circ]$  intervallumon konvex, a Jensen-egyenlőtlenség szerint  $\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma \geq 3 \cdot \text{ctg } \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \sqrt{3}$ .

*Prause István* (Budapest, Piarista Gimn., III. o.t.) és *Zaupper Bence* (Győr, Krúdy Gy. Szki., IV. o.t.)

*Megjegyzések.* 1. A feladat állítása akkor is igaz, ha a „beírt” négyzetekre csak azt kívánjuk meg, hogy csúcsaik az oldalegyenesekre illeszkedjenek. A 2. ábra alapján láthatjuk, hogy az I. megoldásban pl. az  $\frac{a}{x}$  számítása szóról-szóra átvihető tompaszögű háromszögre. A II. megoldásban pl. az  $a$  oldal meghatározása a következő lesz:

$$\begin{aligned} a &= EF + FC - EB = \\ &= x + x \cdot \text{ctg } \gamma - x \cdot \text{ctg}(180^\circ - \beta) = \\ &= x(1 + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma), \end{aligned}$$

tehát nincs változás. Természetesen a (3) egyenlőtlenség is igazolható tetszőleges háromszögre (lásd a következő megjegyzést). Derékszögű háromszög esetén a három négyzet közül kettő egybeesik.

2. A bemutatott két megoldás szoros kapcsolatban áll. Ismeretes, hogy a háromszög területe a következő összefüggésből is kiszámítható:

$$(4) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 4t \cdot (\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma).$$

(Lásd. pl. Reiman I.: A geometria és határterületei c. könyve 69. old.)

Egyszerű számolással igazolható, hogy (4) oldalai nem kisebbek, mint  $4t\sqrt{3}$ , azaz  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4t\sqrt{3}$ , illetve  $4t(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) \geq 4t\sqrt{3}$ , tehát  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \sqrt{3}$  (lásd a feljebb idézett mű 236–237. oldalát). Ez azt mutatja, hogy a két különbözőnek látszó megoldás eszköze közös eredetű.

