

I. megoldás. Tekintsük a hatszög oldalvektorait az 1. ábra szerinti irányítással. Jelöljük pl. az $ACE\triangle$ területét t_{ACE} -vel. A vektoriális szorzat definíciója szerint (lásd pl. Reiman István: A geometriai és határterületei c. könyvének 46. oldalán):

$$2t_{ACE} = |(\mathbf{c} + \mathbf{d}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{b})| \quad 2t_{BDF} = |(\mathbf{d} + \mathbf{e}) \times (-\mathbf{b} - \mathbf{c})|.$$

Tekintve, hogy mindkét vektoriális szorzat ugyanolyan irányú, elegendő azt bizonyítani, hogy

$$(1) \quad (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \times (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) \times (-\mathbf{b} - \mathbf{c}).$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai szerint (1) így alakítható:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) &= (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{d} + \mathbf{e}), \\ \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{d} &= \mathbf{b} \times \mathbf{d} + \mathbf{c} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{e} + \mathbf{c} \times \mathbf{e}, \end{aligned}$$

ebben $\mathbf{b} \times \mathbf{d}$ mindkét oldalon szerepel, továbbá $\mathbf{a} \times \mathbf{d} = \mathbf{b} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}$, ezért azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{d} - \mathbf{c} \times \mathbf{e} = 0, \quad \text{azaz} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{d} + \mathbf{e}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Ez pedig nyilván igaz, hiszen $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{e} = -\mathbf{c} - \mathbf{f}$, és ez párhuzamos a $\mathbf{c}$ -vel. Mivel átalakításaink megfordíthatók, igaz a feladat állítása.

Nyilvánvaló, hogy megoldásunk nemcsak konvex, hanem bármilyen, a feltételeknek megfelelő hatszögre alkalmazható, azaz a hatszög lehet akár hurkolt, vagy akár nem síkbeli hatszög is.

Gyukics Mihály (Szolnok, Varga Katalin Gimn., IV. o.t.) és *Kiss László* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A 2. ábrán egy konvex hatszög van. Ennek A, B, C csúcsai és az R pont egy AC átlójú paralelogrammát határoz meg. Hasonlóan szerkesztettük a CE átlójú $CDEP$, illetve az EA átlójú $EFAQ$ paralelogrammát. A 3. ábra paralelogrammái úgy készültek, hogy egy-egy átlójuk a BD, DF , illetve az FB szakasz, tehát a $BDF\triangle$ oldalai, és a paralelogrammáknak a hatszögcsúcsoktól különböző csúcsai S, T, U . Könnyen látható, hogy $RP = ST = AB - ED$, és hasonlóan $PQ = TU$ és $QR = US$. Ezért $RPQ\triangle \cong STU\triangle$, tehát $t_{RPQ} = t_{STU}$, amely állítás akkor is igaz, ha az R, P, Q , illetve az S, T, U pontok egybeesnek. Ez azt is jelenti, hogy a 3-3 paralelogramma területösszege egyenlő. Ennek folytán az $ACE\triangle$ területe is, és a $BDF\triangle$ területe is a megfelelő paralelogrammák félterületének és a köztük lévő háromszög területének az összege, és ez a két esetben egyenlő.

Ha a hatszögnek van 180° -nál nagyobb szöge, akkor két ilyen is van. Ilyen konkáv hatszöget látunk a 4. és 5. ábrán. Könnyen leolvasható, hogy a $t_{CDEQ} + t_{EFAP} - t_{ABCR} - t_{RPQ}$ és a $t_{BCDT} + t_{ABUF} - t_{FEDS} - t_{STU}$ területek egyenlőek, és $t_{RPQ} = t_{STU}$, ezért $\frac{1}{2}(t_{CDEQ} + t_{EFAP} - t_{ABCR}) - t_{RPQ} = \frac{1}{2}(t_{BCDT} + t_{ABUF} - t_{FEDS}) - t_{STU}$. utóbbi éppen azt jelenti, hogy $t_{ACE} = t_{BDF}$.

Hasonlóan járhatunk el hurkolt hatszög esetén is.

Tóth Ádám (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján



