

Legyenek a tetraéder csúcsai A, B, C, D térfogata V , felszíne A , a beírt gömb sugara $r = 1$, a BCD lappal párhuzamos érintősík a tetraéderből az $AB_1C_1D_1$ tetraédert vágja le. (Lásd az *ábrát*.) Jelöljük az ebbe a tetraéderbe írható gömb sugarát r_A -val, az $ABCD$ tetraéder A csúcsából húzott magasságát m_A -val. Az $AB_1C_1D_1$ és $ABCD$ tetraéderek hasonlóak, ezért $\frac{r_A}{1} = \frac{m_A - 2}{m_A} = 1 - \frac{2}{m_A}$. A többi lappal párhuzamos érintősíkok lemet szette tetraéderekbe írt gömbök sugarát hasonlóan kiszámítva:

$$(1) \quad r_A + r_B + r_C + r_D = 4 - 2 \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_D} \right).$$

Ha a $BCD\Delta$ területét t_A -val jelöljük, a tetraéder térfogata: $V = \frac{t_A \cdot m_A}{3}$, amiből $\frac{1}{m_A} = \frac{t_A}{3V}$. A többi magasságot hasonlóan kiszámítva:

$$(2) \quad \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_D} = \frac{t_A + t_B + t_C + t_D}{3V} = \frac{A}{3V}.$$

A tetraéder térfogata a beírt gömb sugarával is kifejezhető, $V = \frac{A \cdot r}{3}$, amiből (tekintve, hogy $r = 1$) $A = 3V$. Ezért

$$(2) \text{ jobb oldala: } \frac{A}{3V} = \frac{3V}{3V} = 1, \text{ és így (1)-ből } r_A + r_B + r_C + r_D = 4 - 2 = 2.$$

Szülágyi Judit (Balatonfüred, Lóczy L. Gimn., II. o.t.)

Megjegyzés. A feladat síkbeli megfelelője a következő: A háromszögbe írt r sugarú kör oldalakkal párhuzamos érintői által lemet szett háromszögekbe írható körök sugara r_a, r_b, r_c . Ekkor $r_a + r_b + r_c = r$

