

A kijelölt n pont legyen a derékszögű koordináta-rendszer n rácpontja. Ekkor a pontok koordinátái egész számok. A koordináták paritása alapján a pontokat négy osztályba soroljuk:

1. Mindkét koordináta páros, az osztályba tartozó pontok száma n_1 ,
2. az első koordináta páros, a második páratlan, a pontok száma n_2 ,
3. az első koordináta páratlan, a második páros, a pontok száma n_3 ,
4. mindkét koordináta páratlan, a pontok száma n_4 .

Nyilván $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$, és az is világos, hogy az egy osztályba tartozó pontpárok „jó” szakaszokat határoznak meg, két különböző osztályba tartozó pont pedig nem.

Nézzük most példaként azt az esetet, amikor $n_1 \geq n_2 + 2$. Hagyjunk el az első osztályból egy pontot, és helyette vegyünk fel egy új pontot a második osztályba. Így az első osztályban $n_1 - 1$ „jó” szakasszal kevesebb lesz, a másodikban pedig n_2 -vel több. Ezért a „jó” szakaszok száma változatlan n mellett csökkent. Ugyanezt mondhatjuk el bármilyen $n_i \geq n_j + 2$ ($i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$) esetén. Minimális számú „jó” szakaszt tehát akkor kapunk, ha $|n_i - n_j| < 2$.

Ezek szerint, ha $n = 4k$ (k pozitív egész), akkor a legkevesebb „jó” szakasz az $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = k$ esetben lesz, és a „jó” szakaszok száma: $4 \binom{k}{2}$. Ez n -nel kifejeze: $\frac{n(n-4)}{8}$.

Ha $n = 4k + 1$, akkor a „jó” szakaszok száma úgy lesz minimális, ha három osztály mindegyikében k darab pont van, egyben pedig $k + 1$, a „jó” szakaszok száma most $3 \binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}$.

Az $n = 4k + 2$ esetben az előbbihez hasonlóan a „jó” szakaszok számának minimuma: $2 \binom{k}{2} + 2 \binom{k+1}{2} = \frac{(n-2)^2}{8}$.

Végül az $n = 4k + 3$ esetben: $\binom{k}{2} + 3 \binom{k+1}{2} = \frac{n-1)(n-3)}{8}$.

Zakariás Ildikó Székesfehérvár, (Teleki Blanka Gimn., III.o.t.)

Megjegyzés: A függvény megfogalmazható az r -dimenziós tér pontpárjai meghatározta szakaszokra is. Ekkor egy osztályba soroljuk azokat a rácpontokat, amelyek első, második, stb. koordinátája azonos paritású. Ezért összesen 2^r osztály lesz. Egy szakasz akkor és csak akkor lesz „jó”, ha végpontjai ugyanabba az osztályba tartoznak. Minimális számú „jó” szakaszt kapunk, ha $|n_i - n_j| < 2$ ($i, j = 1, 2, \dots, 2^r; i \neq j$), $n_1 + n_2 + \dots + n_{2^r} = n$. A további számolások ugyanúgy végezhetők, mint az eredeti feladatban.