

Jelöljük a szabályos háromszög csúcsait P , Q , R -rel, és legyen $PQ = 1$. Az AB egyenes és a háromszög határának közös pontjai M és N (lásd az 1. ábrát). Az MN egyenes a szabályos háromszöget két alakzatra vágja szét, amelyek közül az egyik biztosan háromszög. Ábránkon ez az MRN háromszög. Ennek a háromszögnek az M és N csúcsánál lévő szögei közül az egyik nem nagyobb, mint 60° , legyen ez pl. az NMR . Ekkor AB eltolható úgy, hogy A az MR oldalra illeszkedő R -től különböző szabályos háromszög csúcsba kerüljön, (az ábrán ez a P pont) és a szakasz pontjai a háromszöglemez pontjai maradjanak. A 2. ábrán az eltolt szakasz az A_1B_1 . Jelöljük α -val a QPB_1 és RPB_1 szögek közül a nem nagyobbat. Világos, hogy $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$, és A_1B_1 vetülete az egyes oldalakon: $A_1B_1 \cdot \cos \alpha$, $A_1B_1 \cdot \cos(60^\circ - \alpha)$, $A_1B_1 \cdot \sin(30^\circ - \alpha)$. A vetületek összege:

$$\begin{aligned} A_1B_1 \cdot (\cos \alpha + \cos(60^\circ - \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)) &= \\ A_1B_1 \cdot (\cos \alpha + \cos 60^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha + \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 30^\circ \cdot \sin \alpha) &= \\ = 2 \cdot A_1B_1 \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Mivel $\cos \alpha$ a $0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, a $\cos \alpha$ akkor a legnagyobb, ha $\alpha = 0^\circ$, és akkor a legkisebb, ha $\alpha = 30^\circ$.

Az $\alpha = 0^\circ$ eset azt jelenti, hogy a vetületek összege akkor a legnagyobb, ha az AB szakasz párhuzamos a PQR háromszög egyik oldalával. Könnyen látható, hogy ha AB minden pontja belső pont, akkor $AB < 1$, és AB elhelyezhető PQ -val párhuzamosan úgy, hogy az elmozgatott AB minden pontja továbbra is belső pont. A maximum tehát mindig létezik, és értéke $2 \cdot AB$.

Az $\alpha = 30^\circ$ eset azt jelenti, hogy az AB szakasz merőleges a szabályos háromszög egyik oldalára. Nyilvánvaló, hogy az AB szakasz csak akkor mozgatható el az $\alpha = 30^\circ$ -nak megfelelő helyzetbe, és ekkor létezik a keresett minimum, ha AB kisebb, mint a szabályos háromszög magassága, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. A minimum ekkor $AB \cdot \sqrt{3}$.

Ha $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq AB < 1$, akkor $0 < \frac{\sqrt{3}}{2AB} \leq 1$, így egyértelműen létezik olyan $0^\circ < \beta < 30^\circ$ szög, amellyel $\frac{\sqrt{3}}{2AB} = \cos \alpha$ ($\beta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2AB}$). Ezzel

$$\begin{aligned} 2AB \cdot \cos \alpha &= 2AB \cdot \cos(30^\circ - \beta) = 2AB \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2AB} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4AB^2 - 3}}{2AB} \right) = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4AB^2 - 3} \end{aligned}$$

mindig kisebb a vetületek összegénél, amely ezt az értéket tetszőlegesen megközelítheti.

Gyurkó L. Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) Várkonyi Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

