

Legyen $u = 5 + \sqrt{21}$, $v = 5 - \sqrt{21}$, és tetszőleges n nemnegatív egészre $a_n = u^n + v^n$. Az (a_n) sorozatra igaz, hogy $a_0 = 2$, $a_1 = 10$ és

$$(1) \quad a_{n+1} = u^{n+1} + v^{n+1} = (u + v)(u^n + v^n) - uv(u^{n-1} + v^{n-1}) = 10a_n - 4a_{n-1}.$$

Ennek az azonosságnak a felhasználásával bebizonyítjuk, hogy a_n minden n -re egész és osztható 2^n -nel. Ez $n = 0$ -ra és $n = 1$ -re igaz. Ha pedig a_n osztható 2^n -nel és a_{n-1} osztható 2^{n-1} -nel, akkor (1) jobb oldalán mindkét tag 2^{n+1} -nel osztható egész szám, ezért a_{n+1} is 2^{n+1} -nel osztható egész szám.

Mivel $0 < v < 1$, tetszőleges pozitív egész n -re $a_n < \left(5 + \sqrt{21}\right)^n + 1 < a_n + 1$, vagyis $\left(5 + \sqrt{21}\right)^n + 1$ egész része nem más, mint a_n . Ezzel az állítást igazoltuk.