

Először bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

A jobb oldalt bővítsük $(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ -gyel.

$$\frac{(2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{2(n - (n-1))}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}.$$

$n \geq 1$ pozitív egész, ezért $\sqrt{n-1} < \sqrt{n}$, a nevezőt növeljük, ha $n-1$ helyébe n -et írunk, s ezáltal a tört értéke csökken, azaz

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} > \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Alkalmazzuk a (2) egyenlőtlenséget tagonként $n = 2$ -től, az (1) egyenlőtlenség bal oldalára.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2, \frac{1}{\sqrt{3}} < 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n-1}} < 2\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n-2}, \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Az egyenlőtlenség megfelelő oldalait adjuk össze, és mindkét oldalhoz adjunk 1-et.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség $n \geq 2$ -re. $n = 1$ esetén is teljesül, hogy $1 \leq 2\sqrt{n} - 1 = 1$, de ebben az egy esetben egyenlőség áll fenn.

Haus Zoltán (Nagykanizsa, Mező F. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. A feladat állítása teljes indukcióval is bizonyítható.