

A feladat a matematika nyelvére átfogalmazva azt jelenti, hogy az n természetes számot 3 különböző természetes szám összegére kell felbontani. Milyen n esetén lesz a felbontások száma n -nél 1-gyel nagyobb?

Írjuk fel pl. $n = 6$ esetére az összes lehetséges felbontást:

1 1 4	2 1 3	3 1 2	4 1 1
1 2 3	2 2 2	3 2 1	
1 3 2	2 3 1		
1 4 1			

Láthatjuk, hogy a felsoroltak között némelyik többször is előfordul, pl. 1 2 3 és 2 1 3 csak a sorrendben különbözik, amit mi nem tudunk megkülönböztetni, mert csak azonos fajtájú szaloncukrunk van. Az $n = 6$ esetén csak háromféle különböző halomba osztás létezik, és közülük csak egy elégíti ki azt a feltételt, hogy minden halomban más-más számú cukor legyen, $n < 6$ esetén pedig egy sem tudja kielégíteni a feladat feltételét.

Legyen n elemünk (n darab szaloncukor), ezt 3 nem üres halmazba $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ -féleképpen oszthatjuk szét. (Képzeljük el ugyanis, hogy a szaloncukrokat sorban lerakjuk, és három kupacra bontjuk két osztóvonallal. Az osztóvonalakat pedig $n-1$ közre helyezhetjük.) Ez az összes lehetséges felosztás; ebből le kell vonnunk azok számát, amelyek többször fordulnak elő, illetve nem tesznek eleget a feladat követelményének.

Legyen $k < n$, és számoljuk meg azokat a felosztásokat, amelyekben k (k darab szaloncukor) elemű halmaz kétszer fordul elő. Ezek:

$$k, \quad k, \quad n-2k; \quad k, \quad n-2k, \quad k; \quad n-2k, \quad k, \quad k;$$

ez 3 lehetőség, és ha $n-2k = k$, azaz $n = 3k$ (n osztható 3-mal), akkor még egy lehetőség az, amikor a 3 halom mindegyikében ugyanannyi elem (cukor) van.

Eszerint 4 esetet kell megkülönböztetnünk:

1. Ha n páros, de 3-mal nem osztható, akkor $n \geq 2k$, $k \leq \frac{n}{2}$, s mivel k egész, $\frac{n}{2} - 1$ olyan eset van, amikor két halom ugyanannyi elemből áll, s ezek mindegyike 3-szor szerepel. Ekkor a nekünk megfelelő esetek száma:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \left(\frac{n}{2} - 1 \right).$$

Ezt – mivel a sorrendet nem kívánjuk figyelembe venne – el kell osztanunk a 3 elem lehetséges sorrendjeinek számával, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ -tal.

Írjuk fel a feltételeket kielégítő egyenletet:

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \left(\frac{n}{2} - 1 \right)}{6} = n + 1.$$

Rendezve a következő egyenlethez jutunk: $n^2 - 18n - 4 = 0$, s ennek nincs egész megoldása.

2. Ha n páros és 3-mal is osztható, akkor

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \left(\frac{n}{2} - 2 \right) - 1}{6} = n + 1.$$

Innen $n^2 - 18n = 0$, azaz $n = 0$ vagy $n = 18$.

3. Ha n páratlan és nem osztható 3-mal, akkor $\frac{n-1}{2}$ olyan felosztás van, amiben két halom elemszáma megegyezik. Az egyenlet:

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \left(\frac{n-1}{2} \right)}{6} = n + 1,$$

$n^2 - 18n - 7 = 0$. Nincs egész megoldása.

4. Ha n páratlan és osztható 3-mal, az egyenlet:

$$\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3 \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) - 1}{6} = n + 1,$$

$n^2 - 18n - 3 = 0$. Ekkor sincs egész megoldás.

Látjuk, hogy $n = 18$ megoldás, azaz 18 darab szaloncukrot 19-féleképpen tudunk 3 halomba osztani úgy, hogy a cukrok száma minden halomban más legyen. Más megoldása nincs a feladatnak, mivel az összes lehetséges esetet megvizsgáltuk.

Gyimesi Andrea (Miskolc, Földes F. Gimn., 8. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A megoldók többsége (legtöbbjük 3 pontot kapott) csak azt látta be, hogy a 18 jó megoldás, de azt nem, hogy más megoldás nem lehetséges.