

Szemléletünk azt sugallja, hogy a csonkagúlába írható kockák közül az a legnagyobb, amelyiknek egyik lapja egybeesik a csonkagúla fedőlapjával. Ekkor, mivel a gúla magassága  $a$ , valóban gúlába írt kockát kapunk. Ennél nagyobb térfogatú kockát nem lehet a csonkagúlába írni. Lásd a 2. megjegyzést.

Az oldallap és alapsík szögének kiszámításához vegyünk fel egy síkot, amely átmegy a fedőlap középpontján, merőleges az alapsíkra, és párhuzamos a négyzetlap egyik élével. Ez a sík a csonkagúlából egy  $ABCD$  egyenlő szárú trapézot metsz ki, párhuzamos élei  $a$  és  $b$ , magassága  $a$ , az oldalél és alapél szöge,  $\alpha$  megegyezik a keresett két sík hajlásszögével. Innen:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\frac{(b-a)}{2}} = \frac{2a}{b-a}.$$

A kocka térfogata:  $a^3$ ; a csonkagúla térfogata:  $\frac{a}{3}(a^2 + b^2 + ab)$ , és a feltétel szerint

$$2a^3 = \frac{a}{3}(a^2 + b^2 + ab),$$

rendezve az egyenletet a

$$-5a^2 + ab + b^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Oldjuk meg pl.  $a$ -ra:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 20b^2}}{-10} = \frac{1 + \sqrt{21}}{10}b,$$

(csak a pozitív értéket vesszük figyelembe, hiszen  $a > 0$ .)

Helyettesítsük  $a$  most kapott értékét (1)-be:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1+\sqrt{21}}{5}b}{b - \frac{1+\sqrt{21}}{10}b} = \frac{2 + 2\sqrt{21}}{9 - \sqrt{21}} \approx 2,5275,$$

ahonnan  $\alpha \approx 68,4^\circ$ .

*Megjegyzések.* 1. A megoldók többsége természetesnek vette, hogy a kocka élének hossza legfeljebb akkora lehet, mint a csonkagúla fedőélének hossza, és csak a számolást végezte el. Ezek a dolgozatok 3 pontot kaptak.

2. Megmutatjuk, hogy  $a$ -nál nagyobb élhosszúságú kocka nem írható a csonkagúlába. Tegyük fel, hogy egy  $b$  élhosszúságú kockát beleírtünk a csonkagúlába. Ha ez nem érinti az alaplapot, akkor toljuk el az alaplappal, arra merőlegesen, amíg nem lesz közös pontja az alaplappal. Eközben benn maradunk a csonkagúlában, mert ilyen mozgattással minden benne levő pont benne marad. (A csonkagúla helyett csak az alap- és fedőlap síkját rajzoltuk meg.)

A most kapott kockának vagy az egyik lapja, vagy csak az egyik éle, vagy csak az egyik csúcsa lesz az alaplapon; egyik csúcsa tehát mindenképpen, legyen ez  $A$ , és a vele szomszédos csúcsok  $B_1, B_2, B_3$ , továbbá ezeknek közös szomszédai  $C_1, C_2, C_3$  a 3. ábrán látható módon. Végül a kocka nyolcadik csúcsát jelölje  $D$ . Vetítsük a kockát az alapsíkra. A kocka vetületének a kontúrja  $B'_1, C'_3, B'_2, C'_1, B'_3, C'_2$  lesz.  $D'$  tehát ebbe a sokszögbe esik. Mivel ez a sokszög három (esetleg egyenes szakasszá fajult) négyszög egyesítése (ezek éppen az  $A$  csúcsot tartalmazó kockalapok vetületei), ezért  $D'$  ezek valamelyikébe, például az  $A, B'_1, C'_3, B'_2$  négyszögbe esik. Így a  $|AD'|$  távolság vagy legfeljebb akkora, mint az  $|AC'_3|$  távolság, ami nem lehet nagyobb az  $|AC_3| = b \cdot \sqrt{2}$  távolságnál, vagy legfeljebb akkora, mint az  $|AB'_1|$ , illetve az  $|AB'_2|$  távolság, amelyek megfelelően nem lehetnek nagyobbak az  $|AB_1| = |AB_2| = b$  távolságnál. Ezért  $|AD'| \leq b \cdot \sqrt{2}$  mindenképpen fennáll. Azt is tudjuk, hogy  $|AD| = b \cdot \sqrt{3}$ . Ebből Pitagorasz tétele alapján következik, hogy  $|DD'|^2 > 3 \cdot b^2 - 2 \cdot b^2 = b^2$ , hiszen a  $DD'A$  háromszög  $D'$ -nél levő szöge derékszög. Így  $|DD'| \geq b$ , mivel pozitív számokról van szó. Tekintettel arra, hogy a  $DD'$  szakasz merőleges az alap- (és a fedő-)síkra, továbbá mindkét pont e két sík között (esetleg rajtuk) fekszik, ezért távolságuk legfeljebb  $a$ . Így  $a \geq |DD'| \geq b$ .

