Szemléletünk azt sugallja, hogy a csonkagúlába írható kockák közül az a legnagyobb, amelyiknek egyik lapja egybeesik a csonkagúla fedőlapjával. Ekkor, mivel a gúla magassága a, valóban gúlába írt kockát kapunk. Ennél nagyobb térfogatú kockát nem lehet a csonakgúlába írni. Lásd a 2. megjegyzést.

Az oldallap és alapsík szögének kiszámításához vegyünk fel egy síkot, amely átmegy a fedőlap középpontján, merőleges az alapsíkra, és párhuzamos a négyzetlap egyik élével. Ez a sík a csonkagúlából egy $ABCD$ egyenlő szárú trapézt metsz ki, párhuzamos élei a és b, magassága a, az oldalél és alapél szöge, α megegyezik a keresett két sík hajlásszögével. Innen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\frac{(b-a)}{2}} = \frac{2a}{b-a}. \tag{1}$$

A kocka térfogata: a^3; a csonkagúla térfogata: $\dfrac{a}{3}\left(a^2+b^2+ab\right)$, és a feltétel szerint

$$2a^3 = \frac{a}{3}\left(a^2+b^2+ab\right),$$

rendezve az egyenletet a

$$-5a^2+ab+b^2=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Oldjuk meg pl. a-ra:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+20b^2}}{-10} = \frac{1+\sqrt{21}}{10}b,$$

(csak a pozitív értéket vesszük figyelembe, hiszen $a > 0$.)

Helyettesítsük a most kapott értékét (1)-be:

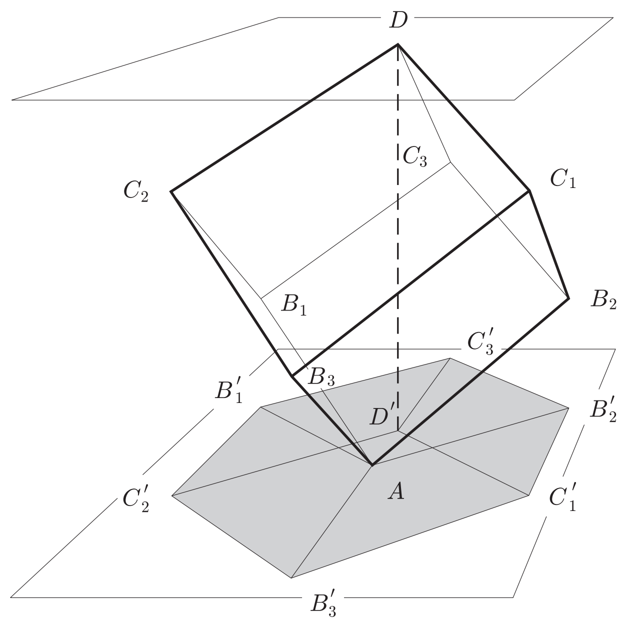
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1+\sqrt{21}}{5}b}{b-\frac{1+\sqrt{21}}{10}b} = \frac{2+2\sqrt{21}}{9-\sqrt{21}} \approx 2,5275,$$

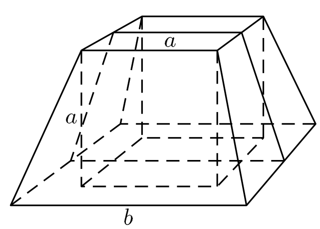
ahonnan $\alpha \approx 68,4°$.

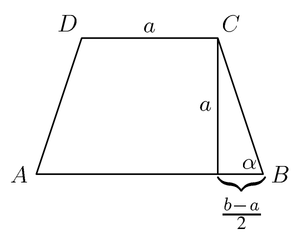
Megjegyzések. 1. A megoldók többsége természetesnek vette, hogy a kocka élének hossza legfeljebb akkora lehet, mint a csonkagúla fedőélének hossza, és csak a számolást végezte el. Ezek a dolgozatok 3 pontot kaptak.

2. Megmutatjuk, hogy a-nál nagyobb élhosszúságú kocka nem írható a csonkagúlába. Tegyük fel, hogy egy b élhosszúságú kockát beleírtunk a csonkagúlába. Ha ez nem érinti az alaplapot, akkor toljuk el az alaplap irányába, arra merőlegesen, amíg nem lesz közös pontja az alaplappal. Eközben benn maradunk a csonkagúlában, mert ilyen mozgatással minden benne levő pont benne marad. (A csonkagúla helyett csak az alap- és fedőlap síkját rajzoltuk meg.)

A most kapott kockának vagy az egyik lapja, vagy csak az egyik éle, vagy csak az egyik csúcsa lesz az alaplapon; egyik csúcsa tehát mindenképpen, legyen ez A, és a vele szomszédos csúcsok B_1, B_2, B_3, továbbá ezeknek közös szomszédai C_1, C_2, C_3 a *3. ábrán* látható módon. Végül a kocka nyolcadik csúcsát jelölje D. Vetítsük a kockát az alapsíkra. A kocka vetületének a kontúrja B_1', C_3', B_2', C_1', B_3', C_2' lesz. D' tehát ebbe a sokszögbe esik. Mivel ez a sokszög három (esetleg egyenes szakasszá fajult) négyszög egyesítése (ezek éppen az A csúcsot tartalmazó kockalapok vetületei), ezért D' ezek valamelyikébe, például az A, B_1', C_3', B_2' négyszögbe esik. Így a $|AD'|$ távolság vagy legfeljebb akkora, mint az $|AC_3'|$ távolság, ami nem lehet nagyobb az $|AC_3| = b\cdot\sqrt{2}$ távolságnál, vagy legfeljebb akkora, mint az $|AB_1'|$, illetve az $|AB_2'|$ távolság, amelyek megfelelően nem lehetnek nagyobbak az $|AB_1| = |AB_2| = b$ távolságnál. Ezért $|AD'| \le b\cdot\sqrt{2}$ mindenképpen fennáll. Azt is tudjuk, hogy $|AD| = b\cdot\sqrt{3}$. Ebből Pitagorasz tétele alapján következik, hogy $|DD'|^2 > 3\cdot b^2 - 2\cdot b^2 = b^2$, hiszen a $DD'A$ háromszög D'-nél levő szöge derékszög. Így $|DD'| \ge b$, mivel pozitív számokról van szó. Tekintettel arra, hogy a DD' szakasz merőleges az alap- (és a fedő-)síkra, továbbá mindkét pont e két sík között (esetleg rajtuk) fekszik, ezért távolságuk legfeljebb a. Így $a \ge |DD'| \ge b$.


D
C3
C2
C1
B1
B2
C3'
B3
B1'
B2'
D'
A
C2'
C1'
B3'


a
a
b


D
a
C
a
A
α
B
(b−a)/2