

Rajzoljunk először egy tetszőleges trapéz. Hosszabbik párhuzamos oldala $AB = a$, rövidebbik párhuzamos oldala $CD = b$. Fejezzük ki az átlók metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos szakasz hosszát a -val és b -vel.

Jelölje az átlók metszéspontját O , a párhuzamos és AD metszéspontja E , CB -vel való metszéspontja F , és legyen G az AB szakasz azon pontja, amelyre $CG \parallel AD$.

Az $AOB\triangle \sim COD\triangle$ -ből $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} = \frac{m_a}{m_b}$; az EF és CG szakasz metszéspontját H -val jelölve, a $CGB\triangle \sim CHF\triangle$ -ből $\frac{HF}{GB} = \frac{m_b}{m_a + m_b}$, innen $HF = GB \cdot \frac{m_b}{m_a + m_b}$.

$$EF = EH + HF = b + GB \cdot \frac{m_b}{m_a + m_b} = b + (a - b) \frac{b}{a + b} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Az előbb kapott eredményt alkalmazzuk a feladatban adott derékszögű érintő trapézra. Így azt kell most igazolnunk, hogy

$$EF = \frac{2ab}{a + b} = m.$$

A trapézba írt kör sugara r , és $AD = 2r = m$. Az érintőnégyyszögben a szemközti oldalak összege egyenlő, azaz

$$CB + AD = CB + m = a + b,$$

ahonnan $CB = a + b - m$.

A BCG derékszögű háromszögben

$$(a + b - m)^2 = (a - b)^2 + m^2.$$

Négyzetreemelés és rendezés után kapjuk, hogy

$$m = \frac{2ab}{a + b},$$

s ezt akartuk bizonyítani.

Méder Áron (Budapest, Táncsics M. Gimn., II. o.t.)

