

Legyen a kör sugara $R = 1$, egy körcikkhez tartozó középponti szög $\frac{360^\circ}{n}$, az ívhossz $i = \frac{2\pi}{n}$.

A kúp alapkörének sugara r . A $2r\pi = \frac{2\pi}{n}$ egyenletből

$$r = \frac{1}{n}.$$

A kúp magasságát a Pitagorasz-tétellel számíthatjuk ki:

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}.$$

A kúpok együttes térfogata:

$$V = \frac{n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \pi \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}}{3} = \frac{\pi \sqrt{n^2 - 1}}{3 n^2}.$$

Kérdés, mikor lesz ez az összeg maximális.

A $\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2} = \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$ kifejezés „láthatóan” csökken, ha n növekszik (és $n \geq 2$, hiszen legalább két körcikkre szétvágtuk a papírlapot):

n | 2 | 3 | 4 | 5

$$\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2} \left| 0,433 \dots \right| 0,314 \dots \left| 0,242 \dots \right| 0,196 \dots$$

Az $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$ függvény számítógéppel készült grafikonját mutatja a 3. ábra.

Várható tehát, hogy a maximumot $n = 2$ esetén kapjuk. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2^2 - 1}}{2^2} > \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2}, \quad \text{ha } n > 2.$$

Négyzetre emelve ($n^2 - 1 > 0$), és rendezve

$$3n^4 - 16n^3 - 16 > 0.$$

Ez n^2 -ben egy másodfokú kifejezés, alakítsuk teljes négyzetté:

$$9n^4 - 48n^2 - 48 = (3n^2 - 8)^2 - 16 > 0,$$

ahonnan $(3n^2 - 8)^2 > 16$, márpedig ha $n > 2$, akkor $3n^2 > 8$, és

$$(3n^2 - 8)^2 > (3 \cdot 2^2 - 8)^2 = 4^2 = 16.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. A térfogatösszeg akkor maximális, ha a kört 2 körcikkre osztottuk.



