I. megoldás. Mivel p és q relatív prímek, a $0, p, 2p, \dots, (q-1)p$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo q, ezért létezik pontosan egy olyan $0 \le k \le q-1$ egész szám, amelyre $kp \equiv n \pmod q$. Ha $k \le \frac{n}{p}$ is teljesül, akkor már készen is vagyunk; a p perces homokórával lemérünk k-szor p percet, majd a másik órával a hiányzó néhányszor q percet. Ellenkező esetben ez a módszer nem működik, ezért egy másik módszert is mutatunk.

Tegyük fel először, hogy k páros, $k = 2m$. Mérjünk le a p perces órával mp percet, de közben indítsuk el a q perces órát is, és amikor lejár, mindig fordítsuk meg. Az mp perc letével a q perces óra x perce jár, ahol persze $x \equiv mp \pmod q$. Fordítsuk most meg a q perces órát. Feltételezve, hogy a lepergett homok a fordítás után ugyanannyi, tehát x perc alatt pereg vissza, a q perces óra az $(mp+x)$-edik perc végén jár le. Mivel $mp + x \equiv kp \equiv n \pmod q$, és $mp + x \le mp + q \le \frac{q-1}{2}p + q < n + q$, így vagy éppen n percet mértünk le, vagy még néhányszor q perc hiányzik, amit lemérhetünk az éppen lejárt q perces órával.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor k páratlan, $k = 2m + 1$. A p perces órával mérjünk le $(m+1)p$ percet. A q perces órát a p-edik perc végén indítsuk el, amikor lejár, mindig fordítsuk meg. Az $(m+1)p$ perc elteltével a q perces órában x percnyi homok pergett le, ahol $x \equiv mp \pmod q$. Most fordítsuk meg a q perces órát, amely így az $(m+1)p + x$-edik perc végén jár le. Mivel $(m+1)p + x \equiv kp \equiv n \pmod q$ és $(m+1)p + x < \frac{q}{2}p + q \le n + q$, ezúttal is kész vagyunk.

Több dolgozat alapján

II. megoldás. Legyen $-\frac{q}{2} < k \le \frac{q}{2}$ az az egész szám, amelyre $kp \equiv 1 \pmod q$. (Ilyen egyértelműen létezik, mert $(p,\ q) = 1$.) Indítsuk el mindkét homokórát, és amikor valamelyik lejár, fordítsuk meg. Vizsgáljuk meg, mi történik $|k| \cdot p$ perc elteltével. Mivel $|k|p \equiv \pm 1 \pmod q$, a p perces óra éppen lejárt, a q perces pedig vagy 1 perce jár, vagy 1 perce van még hátra. Az előbbi esetben fordítsuk meg mindkét, az utóbbi esetben csak a p perces órát. Ilyen módon elértük, hogy legfeljebb $\frac{pq}{2}$ perc után a p perces órában az összes homok a felső tégelyben van, a q perces óra pedig 1 perc múlva jár le.

Ettől kezdve minden egyes perc leteltét mérhetjük: amikor a q perces óra lejár, addigra a p percesből éppen 1 percnyi homok pereg le. Mindkét órát megfordítva, az előbbi állapot fordítottja áll elő: a q perces órában minden homok a felső tégelyben van, a p perces pedig 1 perc múlva jár le.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)