

Bár a feladat szövegéből sajnálatosan kimaradt, nyilván 3^n -nél kisebb *abszolút értékű* főegyütthatóról van szó. Minden pozitív egész n -hez konstruálunk megfelelő polinomot. Legyen először $n = 2k$, ahol k pozitív egész. Defináljuk az f függvényt a következőképpen:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 5x + 1}{4x^2 - 4x + 1}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a definíció $x = \frac{1}{2}$ kivételével mindenhol értelmes. Mivel $f(0) = f(1) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f = -\infty$, a függvény a $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ intervallumokon befutja a $(-\infty; 1)$ félegyenest. Legyen T_k a k -adik Csebisev-polinom (ld. az 1. megjegyzést), és tekintsük a $p(x) = T_k(f(x))$ függvényt. Ez egy racionális törtfüggvény, amely felírható

$$p(x) = T_k(f(x)) = \frac{q(x)}{(4x^2 - 4x + 1)^k}$$

alakban, ahol q egy $2k$ -adfokú egész együtthatós polinom. Mivel T_k -nak k különböző gyöke van a $(-1; 1)$ intervallumban, p , és ezáltal q is a $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ és $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ intervallumon egyaránt k helyen eltűnik. A q tehát olyan $2k$ -adfokú polinom, amelynek $2k$ különböző gyöke van $(0; 1)$ -ben. Ugyancsak könnyen ellenőrizhető, hogy q főegyütthatója

$$0 < 4^k T_k\left(\frac{5}{4}\right) = 4^k \operatorname{ch}\left(k \operatorname{arch} \frac{5}{4}\right) = 4^k \operatorname{ch}(k \ln 2) = 4^k \frac{2^k + 2^{-k}}{2} < 8^k = (\sqrt{8})^n < 3^n.$$

Ha $n = 2k + 1$, akkor az előbbi polinomot megszorozhatjuk a $2x - 1$ polinommal, így a főegyüttható az előbbi kétszerese lesz, és egy új gyök keletkezik $x = \frac{1}{2}$ -ben.

Megjegyzések. 1. A T_k Csebisev-polinom az a kifejezés, ahogyan $\cos k\alpha$ előáll $\cos \alpha$ polinomjaként; azaz $T_k(\cos \alpha) = \cos k\alpha$.

2. *Pap Gyula* megoldásában a $p_1(x) = 2x - 1$, $p_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$, $p_{2n}(x) = p_n(x)^2 - 2x^n(1 - x)^n$ rekurzióval definiált polinomok révén konstruált tetszőleges fokszámú, a feladat követelményeit kielégítő polinomot.