

Nyilván $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ szigorúan monoton nő, $a_n < b_n$, és c_n definíciója alapján $c_n = n + 2b_n - a_n = n + (b_n - a_n) + b_n > b_n$. Ezért az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok közül semelyik kettőnek nincs közös eleme (ez $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ esetén nyilvánvaló, $m < n$ esetén a_n és b_n definíciója miatt $a_n \neq c_m \neq b_n$, $m \geq n$ esetén pedig $c_m > b_m > a_m \geq b_n \geq a_n$ miatt $a_n \neq c_m \neq b_n$.)

Bebizonyítjuk, hogy minden n -re teljesül az alábbi három állítás valamelyike:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_n = \left[n(1 + \sqrt{3}) \right] - 2, \quad b_n = \left[n(1 + \sqrt{3}) \right] - 1, \quad c_n = \left[n(2 + \sqrt{3}) \right], \\ (2) \quad & a_n = \left[n(1 + \sqrt{3}) \right] - 1, \quad b_n = \left[n(1 + \sqrt{3}) \right], \quad c_n = \left[n(2 + \sqrt{3}) \right] + 1, \\ (3) \quad & a_n = \left[n(1 + \sqrt{3}) \right] - 2, \quad b_n = \left[n(1 + \sqrt{3}) \right], \quad c_n = \left[n(2 + \sqrt{3}) \right] + 2. \end{aligned}$$

Ebből a feladat állítása következik.

Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ -re látható, hogy (2) teljesül. Tegyük fel, hogy $1, 2, \dots, n$ -re igaz, és vizsgáljuk $n + 1$ -re.

Az a_{n+1} -nél kisebb pozitív egészek száma $a_{n+1} - 1$. Másrészt az a_{n+1} -nél kisebb pozitív egészek az $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, valamint a $c_1, \dots, c_n$ közül azok, amelyek a_{n+1} -nél kisebbek. Így $a_{n+1} \leq 3n + 1$.

Ha $i \leq \left[\frac{a_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right]$, akkor $i \leq \left[\frac{3n}{2 + \sqrt{3}} \right] \leq n$, így az indukciós feltevés alapján $c_i \leq \left[i(2 + \sqrt{3}) \right] + 2 \leq \left[\left[\frac{a_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right] (2 + \sqrt{3}) \right] + 2$ (az egészrész-jelek elhagyása növelést jelent, mert az egészrészben szereplő kifejezést nem egészek). Ezért az a_{n+1} -nél kisebb c_i -k száma legalább $\left[\frac{a_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right]$. Másrészt $n \geq i \geq \left[\frac{a_{n+1}}{2 + \sqrt{3}} \right]$ -re már $c_i \geq a_{n+1}$ adódik: $c_i \geq \left[i(2 + \sqrt{3}) \right] \geq \left[a_{n+1} \right] = a_{n+1}$. Ezért $2n + \left[\frac{a_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right] \leq a_{n+1} - 1 \leq 2n + \left[\frac{a_{n+1}}{2 + \sqrt{3}} \right] - 1$. Ebből

$$\begin{aligned} 2n + \frac{a_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} - 1 &< a_{n+1} - 1 < 2n + \frac{a_{n+1}}{2 + \sqrt{3}}, \\ 2n - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} &< a_{n+1} \left(1 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) < 2n + 1, \\ n(1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} &< a_{n+1} < n(1 + \sqrt{3}) + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \\ (n + 1)(1 + \sqrt{3}) - 3 &< a_{n+1} < (n + 1)(1 + \sqrt{3}) - 1. \end{aligned}$$

Így $a_{n+1} = \left[(n + 1)(1 + \sqrt{3}) \right] - 2$ vagy $a_{n+1} = \left[(n + 1)(1 + \sqrt{3}) \right] - 1$.

b_{n+1} értékére hasonló módon következtethetünk:

A b_{n+1} -nél kisebb pozitív egészek az $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_n$, valamint a b_{n+1} -nél kisebb c_i -k, amelyek száma legalább $\left[\frac{b_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right]$ és legfeljebb $\left[\frac{b_{n+1}}{2 + \sqrt{3}} \right] - 1$, tehát

$$\begin{aligned} 2n + 1 + \left[\frac{b_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} \right] &\leq b_{n+1} - 1 \leq 2n + 1 + \left[\frac{b_{n+1}}{2 + \sqrt{3}} \right] - 1, \\ 2n + \frac{b_{n+1} - 1}{2 + \sqrt{3}} &< b_{n+1} - 1 < 2n + 1 + \frac{b_{n+1}}{2 + \sqrt{3}}, \\ 2n - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + 1 &< b_{n+1} \left(1 - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) < 2n + 2, \\ n(1 + \sqrt{3}) + 1 &< b_{n+1} < (n + 1)(1 + \sqrt{3}), \\ (n + 1)(1 + \sqrt{3}) - 2 &< b_{n+1} < (n + 1)(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ebből $b_{n+1} = \left[(n + 1)(1 + \sqrt{3}) \right] - 1$ vagy $b_{n+1} = \left[(n + 1)(1 + \sqrt{3}) \right]$.

Így a_{n+1} és b_{n+1} értékeire az (1), (2), (3) állítások valamelyike teljesül ($a_{n+1} = b_{n+1}$ nyilván kizárt), és c_{n+1} -re is teljesül a megfelelő állítás $c_{n+1} = (n + 1) + 2b_{n+1} - a_{n+1}$ miatt.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján