

Jelöljük az oldalakat az a, b, c, d, e kisbetűkkel, a velük nem érintkező átlókat a megfelelő A, B, C, D, E nagybetűkkel. Így minden átlót számba vettük és mindegyiket csak egyszer. Az öt csúcs által meghatározott lehetséges húrnégyszögek mindegyikére írjuk fel a Ptolemaiosz-tételt, ekkor a

$$be + aA = CD, \quad ca + bB = DE, \quad db + cC = EA, \quad ec + dD = AB, \quad ad + eE = BC$$

összefüggésekhez jutunk. Az egyenlőségek szorzata némi átrendezés után az

$$(1) \quad \left(1 + \frac{aA}{be}\right) \left(1 + \frac{bB}{ca}\right) \left(1 + \frac{cC}{db}\right) \left(1 + \frac{dD}{ec}\right) \left(1 + \frac{eE}{ad}\right) = \left(\frac{ABCDE}{abcde}\right)^2$$

alakot ölti, amelynek jobb oldalán megjelent a feladatban kért hányszor. A célunk most az, hogy a bal oldalt valamiképpen megbecsüljük ugyanezzel a hányszorral, remélhetőleg így majd következtethetünk a keresett szélsőértékre.

A bal oldalon lévő szorzat helyett tekintsük általánosabban az

$$(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n)$$

kifejezést pozitív λ_i -kkel (a mi esetünkben $n = 5$), amely kifejtve a λ_i -knek egy n -edfokú polinomja. Alkalmazzuk minden $1 \leq m \leq n$ esetében az m -edfokú tagok összegére a számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget: azt kapjuk, hogy a megfelelő összeg nem nő, ha minden λ_i helyébe az $\sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ mennyiséget írjuk (ennek oka az, hogy az egyes összegek – a kiindulásul vett polinom homogén komponensei – szimmetrikusak a λ_i -kben). Végeredményben tehát a szorzat sem nő, ha minden λ_i -t a fenti módon helyettesítünk, azaz

$$(2) \quad (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}\right)^n.$$

A $h = \sqrt[5]{\frac{ABCDE}{abcde}}$ jelöléssel az eredeti (1) összefüggés a (2)-vel együtt a

$$h^{10} \geq (1 + h)^5$$

egyenlőtlenséget adja. Mivel az $x \mapsto x^5$ függvény szigorúan növekvő a valós számokon és h pozitív, ezért az előbbi egyenlőtlenség éppen azt jelenti, hogy $h \geq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, azaz

$$\frac{abcde}{ABCDE} = h^{-5} \leq \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^5 = \frac{5\sqrt{5} - 11}{2}.$$

Világos, hogy a fenti egyenlőtlenségekben egyenlőség is teljesül a szabályos ötszög esetében, tehát az $\frac{abcde}{ABCDE}$ hányszor keresett maximuma $\frac{5\sqrt{5} - 11}{2}$.

Gröller Ákos (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az önmagában érdekes (2) egyenlőtlenség azzal a ténnyel egyenértékű, hogy az $f(x) = \ln(1 + e^x)$ függvény konvex, ami következik pl. az $f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$ deriváltfüggvény növekvő voltából is.