

A bizonyítás során az $|f(1)|, \dots, |f(2n)|$ értékek egy súlyozott összegét fogjuk alulról becsülni $f(0) = n$ segítségével.

Először bebizonyítjuk, hogy léteznek olyan $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ valós számok, amelyek nem mind 0-k, és amelyekkel minden x -re teljesül, hogy

$$(2) \quad b_0 f(x) + b_1 f(x+1) + \dots + b_{2n} f(x+2n) = 0.$$

Az (1) jobb oldalán levő tagokra az ismert trigonometrikus összefüggések alapján nem nehéz hasonló azonosságot találni. Például minden a valós számra

$$(3) \quad \cos a(x-1) - 2 \cos a \cos ax + \cos a(x+1) = 0.$$

Tekintsük a következő polinomot:

$$P(u) = \prod_{j=1}^n (u^2 - 2(\cos a_j)u + 1) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_{2n} u^{2n}.$$

Azt állítjuk, hogy ennek együtthatói megfelelőek lesznek, sőt a (2) azonosság tagonként teljesül, vagyis minden $1 \leq i \leq 2n$ -re

$$(4) \quad b_0 \cos a_i x + b_1 \cos a_i(x+1) + \dots + b_{2n} \cos a_i(x+2n) = 0.$$

Írjuk fel P -t a következő alakban:

$$P(x) = (u^2 - 2(\cos a_i)u + 1) (c_0 + c_1 u + \dots + c_{2n-2} u^{2n-2}).$$

A (3) azonosság alapján

$$c_{j-1} (\cos a_i(x+j-1) - 2 \cos a_i \cos a_i(x+j) + \cos a_i(x+j+1)) = 0 \quad (1 \leq j \leq 2n-1),$$

Ezeknek az egyenleteknek az összege pedig éppen (4).

Válasszuk ki most a b_i együtthatók közül az (egyik) legnagyobb abszolút értékűt; legyen ez b_m . A (2) azonosságot $x = -m$ választással írjuk fel a következő alakban:

$$b_m f(0) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq 2n \\ j \neq m}} -b_j f(j-m).$$

Mivel b_j maximális abszolút értékű, azért a háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$f(0) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq 2n \\ j \neq m}} -\frac{b_j}{b_m} f(j-m) \leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq 2n \\ j \neq m}} |f(j-m)| \leq 2n \max_{1 \leq |k| \leq 2n} |f(k)|.$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy $f(0) = n$ és f páros függvény, akkor az egyenlőtlenség két szélső fele $2n$ -nel való osztás után éppen az állítást eredményezi:

$$\frac{1}{2} \leq \max_{1 \leq k \leq 2n} |f(k)|.$$

Megjegyzések. 1. Az $f(0), f(1), \dots$ sorozat $2n$ darab (komplex hányadosú) mértani sorozat összege, az ilyenekre mindig lehet (2) alakú lineáris rekurziót találni. A P polinom valójában a lineáris rekurzív sorozat karakterisztikus polinomja, melynek gyökei a mértani sorozatok hányadosai.

2. Az egyenlőtlenség éles. Ha minden $1 \leq j \leq n$ -re $a_j = \frac{j}{2n+1} \cdot 2\pi$, és x egész szám, de nem osztható $(2n+1)$ -gyel, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n \cos \frac{jx}{2n+1} \cdot 2\pi = \sum_{j=1}^n \frac{\sin \frac{(j+\frac{1}{2})x}{2n+1} \cdot 2\pi - \sin \frac{(j-\frac{1}{2})x}{2n+1} \cdot 2\pi}{2 \sin \frac{\frac{1}{2}x}{2n+1} \cdot 2\pi} = \\ &= \frac{\sin \frac{(n+\frac{1}{2})x}{2n+1} \cdot 2\pi - \sin \frac{\frac{1}{2}x}{2n+1} \cdot 2\pi}{2 \sin \frac{\frac{1}{2}x}{2n+1} \cdot 2\pi} = \frac{\sin x\pi}{2 \sin \frac{\frac{1}{2}x}{2n+1} \cdot 2\pi} - \frac{\sin \frac{\frac{1}{2}x}{2n+1} \cdot 2\pi}{2 \sin \frac{\frac{1}{2}x}{2n+1} \cdot 2\pi} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$