A feladatot először abban a speciális esetben oldjuk meg, amikor c és d relatív prímek. Az a, b, c, d számok különbözősége helyett csupán annyit kötünk ki, hogy nem lehet c és d értéke is 1.

Tegyük fel, hogy az $ac^n + bd^n$ alakú pozitív egészeknek összesen csak véges sok prímosztója van. Legyenek ezek $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Válasszunk mindegyik p_i-hez egy olyan α_i pozitív egészet, hogy a, b és $a+b$ egyike se legyen osztható p^{α_i}-vel.

Azt állítjuk, hogy ha n elég nagy és osztható $\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$-vel, akkor $ac^n + bd^n$ nem osztható $p_i^{\alpha_i}$-vel. (φ az Euler-féle függvény: $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma.) A lehetséges eseteket két részre osztjuk.

I. eset: ha sem c, sem d nem osztható p_i-vel. Legyen $n = k\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)$. Az Euler–Fermat tétel szerint

$$c^n = \left(c^k\right)^{\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)} \equiv 1 \bmod p_i^{\alpha_i} \quad \text{és} \quad d^n = \left(d^k\right)^{\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right)} \equiv 1 \bmod p_i^{\alpha_i},$$

ezért

$$ac^n + bd^n \equiv a + b \bmod p_i^{\alpha_i}.$$

Az α_i definíciója szerint $a+b$ nem osztható $p_i^{\alpha_i}$-nel.

II. eset: ha c vagy d osztható p_i-vel. Az állítás szimmetriája miatt feltehetjük, hogy c osztható p_i-vel. Mivel c és d relatív prímek, ebben az esetben d nem osztható p_i-vel. Ha $n \ge \alpha_i$, akkor c^n osztható $p_i^{\alpha_i}$-nel, és – ismét felhasználva az Euler–Fermat tételt –

$$ac^n + bd^n \equiv a \cdot 0 + b \cdot 1 = b \bmod p_i^{\alpha_i}.$$

Mivel b nem osztható $p_i^{\alpha_i}$-nel, kész vagyunk.

Legyen most $P = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\ldots\varphi\left(p_m^{\alpha_m}\right)$. Ha n elég nagy és osztható P-vel, akkor $ac^n + bd^n$ nem osztható $p_i^{\alpha_i}$-nel semmilyen i-re sem, tehát prímtényezős felbontásban a p_i kitevője kisebb, mint α_i. Mivel az indirekt feltevés szerint más prímosztója nincs, ebből következik, hogy

$$ac^n + bd^n \le p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \ldots p_m^{\alpha_m-1}.$$

Ez azonban ellentmondás, mert c és d közül valamelyik legalább 2, így az $ac^n + bd^n$ sorozat szigorúan monoton nő, és végtelenhez tart.

Hátravan még az általános eset vizsgálata, amikor c és d különböző, nem feltétlenül relatív prím számok. Legyen c és d legnagyobb közös osztója q; $c = c_1 q$, $d = d_1 q$, ahol c_1 és d_1 relatív prímek. Ezekkel a jelölésekkel

$$ac^n + bd^n = q^n\left(ac_1^n + bd_1^n\right).$$

Mivel c_1 és d_1 relatív prímek, a második tényező lehetséges értékeinek, mint láttuk, összesen végtelen sok prímosztója van.

Gyarmati Katalin (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)