

I. megoldás. Legyen $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, \dots$ a Fibonacci-sorozat. Azt állítjuk, hogy az (f_{2k+1}, f_{2k+3}) alakú számpárok megfelelőek lesznek. Mivel ezek a számpárok páronként különbözőek, a konstrukció végtelen sok megoldást állít elő.

Bebizonyítjuk, hogy minden k pozitív egészre

$$(1) \quad f_{2k+1}^2 + 1 = f_{2k-1}f_{2k+3}.$$

Ebből állításunk következik, mert

$$\frac{f_{2k+1}^2 + 1}{f_{2k+3}} = f_{2k-1} \quad \text{és} \quad \frac{f_{2k+3}^2 + 1}{f_{2k+1}} = f_{2k+5}$$

is egész szám lesz.

Az (1) azonosságot teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás igaz $k = 1$ -re, mert $f_3^2 + 1 = 2^2 + 1 = 1 \cdot 5 = f_1 f_5$. Tegyük fel, hogy (1) valamilyen k -ra teljesül, és hogy $m \geq 3$ esetén

$$\begin{aligned} f_{m+2} + f_{m-2} &= f_{m+1} + f_m + f_{m-2} = (f_m + f_{m-1}) + f_m + f_{m-2} = \\ &= 2f_m + (f_{m-1} + f_{m-2}) = 3f_m, \end{aligned}$$

ebből következik az állítás $(k+1)$ -re:

$$\begin{aligned} f_{2k+3}^2 + 1 &= (f_{2k+3}^2 - f_{2k+1}^2) + (f_{2k+1}^2 + 1) = f_{2k+3}^2 - f_{2k+1}^2 + f_{2k-1}f_{2k+3} = \\ &= f_{2k+3}^2 - f_{2k+1}^2 + (3f_{2k+1} - f_{2k+3})f_{2k+3} = f_{2k+1}(3f_{2k+3} - f_{2k+1}) = f_{2k+1}f_{2k+5}. \end{aligned}$$

Az (1) azonosság tehát minden k -ra teljesül.

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az (1) azonosság a Fibonacci-sorozat alábbi ismert explicit alakjából is bebizonyítható:

$$f_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}.$$

II. megoldás. Ha $m \mid n^2 + 1$ és $n \mid m^2 + 1$, akkor m és n relatív prímek. Ha ugyanis m és n legnagyobb közös osztója d , akkor $d \mid m \mid n^2 + 1$ miatt $d \mid 1$. Mivel $m^2 + n^2 + 1$ osztható m -mel és n -nel is, a relatív prímesség miatt osztható mn -nel is. Megfordítva, ha $m^2 + n^2 + 1$ osztható mn -nel, akkor osztható m -mel és n -nel is, amiből következik, hogy $m \mid n^2 + 1$ és $n \mid m^2 + 1$. A feltétel tehát azzal ekvivalens, hogy $m^2 + n^2 + 1$ osztható mn -nel.

Legyen a pozitív egész, és tekintsük az

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 1 = axy$$

egyenletet. Azt állítjuk, hogy ha ennek van pozitív egészekből álló megoldása, akkor végtelen sok is van. Ebből az állítás azonnal következik. Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egy megoldása (2)-nek, és $x_0 \leq y_0$. Ha (2)-t egy paraméteres másodfokú egyenletnek tekintjük, amelyben x az ismeretlen, akkor az egyenlet egyik gyöke x_0 , a másik pedig a gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viète formulák) alapján

$$x_1 = ay_0 - x_0 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0}.$$

Az első formula alapján ez a gyök is egész, a második szerint pedig pozitív, sőt

$$x_1 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0} > \frac{y_0^2}{y_0} = y_0.$$

A (2) egyenletnek ezért az (x_1, y_0) számpár egy újabb, pozitív egészekből álló megoldása, amelyben a két szám összege nagyobb, mint az előzőben: $x_1 + y_0 > x_0 + y_0$. A megoldások között tehát nincs olyan, amelyben a két ismeretlen összege maximális.

Ha $a = 3$, akkor (2)-nek van megoldása, például $x = y = 1$. Az előbbieket szerint ebből következik, hogy végtelen sok olyan (m, n) számpár van, amelyre teljesül, hogy $m^2 + n^2 + 1 = 3mn$.

Tóth Gábor Zsolt (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.) és Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t)

dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. A két megoldás lényegében ugyanazokat a számpárokat adja. A II. megoldásban adott konstrukció ugyanis az (m, n) számpárból az $(n, 3m - n)$ számpárt állítja elő, ami megfelel az $f_{m+2} = 3f_m - f_{m-2}$, rekurciónak. Az $(1, 1)$ számpárt az I. megoldás is előállítja, ha bevezetjük az $f_0 = 0, f_{-1} = 1$ elemeket.

2. A második megoldás módszerével nem nehéz bebizonyítani, hogy más megoldás nincs. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy (2)-nek csak $a = 3$ esetén van pozitív egészekből álló megoldása. Tekintsünk egy olyan (x_0, y_0) megoldást, amelyben $x_0 + y_0$ minimális. Ha $x_0 = y_0 = 1$, akkor $a = 3$ és kész vagyunk. Ellenkező esetben feltehetjük, hogy $x_0 > y_0$ (egyenlők nem lehetnek, mert relatív prímek). Defináljuk most ismét az

$$x_1 = ay_0 - x_0 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0}$$

számot. Ez ismét pozitív egész lesz, de ezúttal

$$x_1 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0} \leq \frac{y_0^2 + y_0}{y_0 + 1} = y_0 < x_0.$$

Az (x_1, y_0) számpár tehát olyan pozitív egészekből álló megoldás, amelyben $x_1 + y_0 < x_0 + y_0$. Ez viszont ellentmondás, mert feltettük, hogy $x_0 + y_0$ minimális.

Ezután már nem nehéz bebizonyítani, hogy ha $x \leq y$ egy megoldása (2)-nek, akkor $x = f_{2k-1}$ és $y = f_{2k+1}$ valamilyen k nemnegatív egészszel. Ez ismét teljes indukcióval történhet. Ha $x + y \leq 2$, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy igaz $x + y < M$ esetén. Ebből bebizonyítjuk $x + y = M$ -re is.

Legyen $x < y$ egy olyan megoldása (2)-nek, amelyben $x + y = M$ és $M \geq 4$. Mivel az $(x, 3x - y) = (x, \frac{x^2 + 1}{y})$ is pozitív egészekből álló megoldás, de ebben $\frac{x^2 + 1}{y} < x$ és $x + \frac{x^2 + 1}{y} < x + y = M$, az indukciós feltevés szerint létezik olyan k nemnegatív egész szám, amelyre $3x - y = f_{2k+1}$ és $x = f_{2k+3}$. Ebből viszont következik, hogy $y = 3f_{2k+3} - f_{2k+1} = f_{2k+5}$.