

A szakaszok hosszához hasonlóan jelöljük megoldásunkban egy tetszőleges sokszög területét ugyanúgy, mint magát a sokszöget. Legyen a feladatbeli háromszög  $ABC$ , a betűzést válasszuk meg úgy, hogy  $BC \leq CA \leq AB$  legyen. Elegendő belátnunk egy olyan tengely létezését, amely mentén kettéhajtva a háromszöget, a lefedett terület legfeljebb  $\frac{3}{5}ABC$ , hiszen a tengelyt párhuzamosan eltolva a lefedett terület folytonosan változik, előbb-utóbb pedig eléri az  $ABC$ -t, vagyis valamelyik helyzetében éppen  $\frac{3}{5}ABC$  lesz.

Ha a háromszöget az  $A$ -ból induló szögfelezője mentén hajtjuk ketté, akkor a hajtás során keletkezett két kis háromszög egyike lefedi a másikat, ui. az eredeti háromszöggel közös  $AB$ , ill.  $AC$  oldalukhoz ugyanakkora magasság tartozik. Ebből persze az is következik, hogy a kis háromszögek  $AB : AC$  arányban osztoznak az  $ABC$  területen, vagyis a hajtás után a lefedett terület az  $ABC$ -nek  $AB/(AC + AB)$ -ed része. Mivel ez a hányados az egyenlőszerűségben éppen  $\frac{1}{2}$ , biztosak lehetünk abban, hogy a hajtás megfelel még az egyenlőszerűséghez „közeli” esetekben is, hiszen a hányados ekkor nem nő nagyon túl az  $\frac{1}{2}$ -en. Pontosabban, a szögfelező mentén való hajtás megfelel  $\frac{AB}{AC + AB} \leq \frac{3}{5}$ , azaz  $\frac{AC}{AB} \geq \frac{2}{3}$  esetén. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy  $\frac{AC}{AB} < \frac{2}{3}$ .

Az  $AB$  oldal felezőpontja legyen  $F$ . Mivel  $BC \leq AC$ , ezért az  $AB$  oldalhoz tartozó magasság  $T$  talppontja az  $FB$  félegyenesen helyezkedik el. Az  $FT$  – esetleg ponttá fajuló – szakasz  $P$  felezőpontjában az  $AB$  oldalra emelt merőleges valamilyen  $M$  pontban metszi az  $AC$  oldalt.

Azt állítjuk, hogy a  $PM$  él mentén való hajtás célravezető. Egy tetszőleges  $X$  pontnak a  $PM$  egyenesre vonatkozó tükörképét jelölje  $X'$ . A  $B$  pontot először az  $F$ -re, majd a  $P$ -re tükrözve  $A'$ -t kapjuk, vagyis

$$\overrightarrow{BA'} = 2\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FT} = \overrightarrow{C'C},$$

amiből egyrészt következik, hogy  $A'$  nem belső pontja az  $ABC$ -nek, másrészt, hogy  $BA'CC'$  – esetleg szakasszá fajuló – paralelogramma. A  $C'A'$  szakasz tehát tartalmazza a  $CB$  oldal  $G$  felezőpontját. A  $PM$  él mentén kettéhajtott  $ABC$  háromszög egybevágó a  $PA'GCMP$  – esetleg háromszöggé fajuló – hatszöggel. De

$$2PA'GCMP = PA'GCMP + PAG'C'MP = A'GCC'G'A = ABC + BA'G + G'MC' = ABC + BA'G + GCM \leq ABC + B$$

ahol

$$\frac{BA'CC'/2}{ABC} = \frac{BA' \cdot CT/2}{AB \cdot CT/2} = \frac{BA'}{AB} = \frac{FT}{AB} = \frac{AT - AF}{AB} = \frac{AT}{AB} - \frac{1}{2} < \frac{AC}{AB} - \frac{1}{2} < \frac{1}{6},$$

vagyis

$$PA'GCMP < \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{12}ABC < \frac{3}{5}ABC,$$

ami igazolja, hogy a hajtás megfelel a kívánalmaknak.

*Megjegyzés.* A fenti módszerrel a feladat állítását a  $\frac{3}{5}$ -nél némileg kisebb  $\frac{\sqrt{33}-1}{8} = 0,593\dots$  értékkel is beláthatjuk.  
*Pap Gyula* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján