

Ha a húrnégyszög oldalait a, b, c, d , félkerületét s jelöli, akkor a húrnégyszögekre vonatkozó Héron-képlet szerint a feltétel

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = a + b + c + d$$

alakba írható. Ha s nem lenne egész szám, akkor a bal oldalon a gyökjel alatt minden tényező egy páratlan szám fele lenne, ilyenek szorzata azonban nemhogy négyzetszám, de egész sem lehetne. Betűzzük rendre x, y, v, z -vel a tényezőket. Ezek tehát egész számok, sőt pozitívak is a háromszög-egyenlőtlenség alapján, és teljesül rájuk az

$$(1) \quad xyvz = (x + y + v + z)^2$$

összefüggés. A bal oldal foka magasabb az ismeretlenekben, mint a jobb oldalé, ezért várható, hogy csak véges sok pozitív egész megoldása van az egyenletnek. A megoldások felkutatására a következő stratégiát választjuk. Feltehetjük, hogy

$$(2) \quad x \leq y \leq v \leq z.$$

Először megmutatjuk, hogy csak véges sok (x, y) számpár jöhet szóba, majd minden ilyen számpár esetén egy véges intervallumba szorítjuk a v lehetséges értékeit. Rögzített (x, y, v) mellett pedig egyenletünk egyszerű másodfokú egyenlet alakját ölti a fennmaradó z ismeretlenben, aminek általában nincsen pozitív egész megoldása. Ezt néha számolással kell majd ellenőriznünk, a legtöbb esetet azonban kizárhatjuk az alábbi egyszerű észrevétellel:

$$(3) \quad x + y + v \quad \text{nem prím.}$$

Valóban, (1) jobb oldala nagyobb 1-nél, tehát z osztható valamilyen p prímszámmal. Ez a p osztja $(x + y + v + z)$ -t, vagyis $(x + y + v)$ -t is, de akkor $x + y + v$ csak úgy lehetne prím, ha p -vel lenne egyenlő, amit kizár a nyilvánvaló

$$(4) \quad z < x + y + v$$

egyenlőtlenség.

Írjuk fel mindenekelőtt a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget a (4) szerint különböző $x + y + v$ és z számokra, ekkor (1)-et is figyelembe véve

$$4(x + y + v)z < (x + y + v + z)^2 = xyvz,$$

azaz

$$4(x + y) < (xy - 4)v$$

következik. Mivel $x + y$ és v pozitív, azért a jobb oldalon $4 < xy$, továbbá

$$(5) \quad 4 \frac{x + y}{xy - 4} < v.$$

Vezessük be a $\lambda = \frac{x + y + v}{z}$, $\mu = \frac{x + y + v}{v}$ jelöléseket. Ekkor $1 < \lambda \leq \mu$, továbbá (1)-ből

$$xy = \frac{(x + y + v + z)^2}{z^2} \frac{z}{v} = (\lambda + 1)^2 \frac{\mu}{\lambda}.$$

Itt $(\lambda + 1)^2/\lambda - (\mu + 1)^2/\mu = (\lambda - \mu)(1 - 1/\mu\lambda) \leq 0$, vagyis

$$xy \leq (\mu + 1)^2,$$

amiből egyrészt

$$(6) \quad xy \leq \left(3 + \frac{x}{y}\right)^2,$$

másrészt

$$\sqrt{xy} - 2 \leq \mu - 1 = \frac{x + y}{v}.$$

Ezt a már ismert $4 < xy$ egyenlőtlenséggel egybevetve

$$v \leq \frac{x + y}{\sqrt{xy} - 2}.$$

Az alsó egészrész jelével a v -re nyert felső becslést egybefűzhetjük a (2) és (5) alsó becslésekkel:

$$(7) \quad \max\left(y, 1 + \left\lfloor 4 \frac{x + y}{xy - 4} \right\rfloor\right) \leq v \leq \left\lfloor \frac{x + y}{\sqrt{xy} - 2} \right\rfloor.$$

Mindezen előkészületek után már megkereshetjük az (1) egyenlet pozitív egész megoldásait a (2) és (4) feltevés mellett. A következőképpen járunk el. Láttuk, hogy $xy \geq 5$, továbbá (6)-ból azonnal következik, hogy $xy \leq (3+1)^2 = 16$. Ez a feltétel persze nem elégséges (6) teljesüléséhez, hiszen (6) arról is szól, hogy hacsak $9 < xy$, akkor x/y nem lehet túl kicsi, azaz x -nek és y -nak valamennyire közel kell lennie egymáshoz. Valójában a következő pozitív egész (x, y) számpárok tesznek eleget a (2), a (6) és az $xy \geq 5$ feltételeknek:

$$(3, 4), \quad (2, 5), \quad (1, 9), \quad (3, 3), \quad (2, 4), \quad (1, 7), \quad (1, 6), \quad (2, 3), \quad (1, 5).$$

Ezek mindegyike előír egy (7) szerinti intervallumot a v számára. Sok v már a (3) alapján kiesik a listából. A fennmaradó esetek közül kiválogatjuk azokat, amelyekben (1)-nek mint másodfokú egyenletnek (4)-et kielégítő pozitív egész z megoldása van. Az összes esetet számba véve (1)-(2)-(4)-nek 4 megoldása van pozitív egészekben:

$$(x, y, v, z) = (4, 4, 4, 4), \quad (2, 5, 5, 8), \quad (1, 9, 10, 10), \quad (3, 3, 6, 6),$$

amelyek rendre az

$$(a, b, c, d) = (4, 4, 4, 4), \quad (8, 5, 5, 2), \quad (14, 6, 5, 5), \quad (6, 6, 3, 3)$$

oldalnégyesekhez tartoznak.

Most megmutatjuk, hogy ezek az oldalnégységek összesen 7 db húrnégyszöget határoznak meg (egybevágoság erejéig). A $(4, 4, 4, 4)$ oldalnégyseshez kizárólag egy négyzet tartozik húrnégyszöggként, azért elegendő belátnunk, hogy a fennmaradó 3 db négyseshez egyenként 2-2 db húrnégyszög tartozik. Átrendezés után mindhárom négyses (a, b, b, c) alakú, ahol $a \neq b \neq c$ és $|a - c| < 2b$. Egy ilyen négyséből mint oldalakból húrtrapéz szerkeszthető, mégpedig egyértelműen. A trapéznek valamelyik átlófelező merőlegesére tükrözve az átlót közrefogó valamelyik két oldalt, olyan másik húrnégyszöghöz jutunk, amelynek oldalai továbbra is (a, b, b, c) , de most a b hosszú oldalak közös csúcsból indulnak ki. Fordítva, ha egy húrnégyszög oldalai valamilyen sorrendben (a, b, b, c) , akkor vagy átellenesek a b hosszú oldalak, ekkor a már megszerkesztett trapézzal van szó; vagy közös csúcsból indulnak ki, ekkor az ebből a csúcsból kiinduló átló felezőmerőlegesére tükrözve az átlót közrefogó valamelyik két oldalt, visszakerülünk a húrtrapéz esetéhez. Ilyenkor tehát a kiindulási négyszög szükségképpen a már megszerkesztett másik húrnégyszöggel egybevágo.

Ezzel a feladatot megoldottuk, meghatároztuk mind a 7 olyan húrnégyszöget, amelynek oldalai egész számok, és területének és kerületének mértékszáma megegyezik.

Burcsi Péter (Pápa, Türr István Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján