

$$\frac{n^2 - 1995^2}{n^2 - 1994^2} = \frac{(n - 1995)(n + 1995)}{(n - 1994)(n + 1994)},$$

így tetszőleges $1995 < k \leq l$ egészekre:

$$\prod_{n=k}^l \frac{n^2 - 1995^2}{n^2 - 1994^2} = \frac{\prod_{n=k}^l (n - 1995)}{\prod_{n=k}^l (n - 1994)} \cdot \frac{\prod_{n=k}^l (n + 1995)}{\prod_{n=k}^l (n + 1994)} = \frac{(k - 1995)(l + 1995)}{(l - 1994)(k + 1994)}$$

Tehát minden $\frac{(k - 1995)(l + 1995)}{(l - 1994)(k + 1994)}$ alakú szám előáll véges sok $\frac{n^2 - 1995^2}{n^2 - 1994^2}$ alakú szám szorzataként. Legyen m tetszőleges pozitív egész, és

$$k = 3989m + 1994, \quad l = 3989 \cdot (3989m^2 + 3988m - 1) + 1994$$

(ekkor az $1995 < k \leq l$ feltétel teljesül). Ezt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} & \frac{(k - 1995)(l + 1995)}{(l - 1994)(k + 1994)} = \\ &= \frac{(3989m - 1)}{3989(3989m^2 + 3988m - 1)} \cdot \frac{3989 \cdot (3989m^2 + 3988m - 1) + 3989}{3989m + 3988} = \\ &= \frac{(3989m - 1)m}{3989m^2 + 3988m - 1} = \frac{m}{m + 1}. \end{aligned}$$

Tehát minden $\frac{m}{m + 1}$ alakú szám előáll. Tetszőleges $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionális számra

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{p + 1} \cdot \frac{p + 1}{p + 2} \cdot \dots \cdot \frac{q - 1}{q}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy tetszőleges 0 és 1 közötti racionális számot megkaphatunk $\frac{n^2 - 1995^2}{n^2 - 1994^2}$ alakú számok szorzataként. Másrészt $0 < \frac{n^2 - 1995^2}{n^2 - 1994^2} < 1$ és racionális, ilyen számok szorzata nyilván csak 0 és 1 közötti racionális szám lehet.

Gyarmati Katalin (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)