

**Megoldás.** 1. Először azt látjuk be, hogy tetszőleges pozitív egész  $n$  esetén lehet találni egy  $n$  különböző elemből álló számtani sorozatot, aminek minden eleme egy pozitív egésznek 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványa. Ezt teljes indukcióval igazoljuk.

$n = 2$ -re az állítás triviális, vegyünk például  $2^2 = 4$ -et és  $3^2 = 9$ -et.

Tegyük fel, hogy  $k$ -ra igaz az állítás, tehát meg tudunk adni  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  pozitív egészeket úgy, hogy

$$a_i = a_1 + (i - 1)d, \quad a_i = b_i^{c_i} \quad (1 \leq i \leq k; b_i, c_i, d \text{ pozitív egész; } c_i \geq 2).$$

Legyen  $a_{k+1} = a_1 + kd$ , így  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  is számtani sorozat lesz, de  $a_{k+1}$  általában nem teljes hatvány.

Legyen  $C = c_1 c_2 \dots c_k$ , és legyen  $A_j = a_j \cdot a_{k+1}^C$  (ahol  $1 \leq j \leq k + 1$ ). Ekkor  $A_j = a_1 a_{k+1}^C + (j - 1)da_{k+1}^C$ , tehát  $A_1, \dots, A_{k+1}$  szintén számtani sorozatot alkot.

$A_{k+1} = a_{k+1} \cdot a_{k+1}^C = a_{k+1}^{C+1}$ , és minden  $1 \leq i \leq k$ -ra  $A_i = b_i^{c_i} a_{k+1}^C = (b_i a_{k+1}^{C/c_i})^{c_i}$ ; ezért minden  $A_j$  egy pozitív egész 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványa.

2. Egy ilyen számtani sorozat nem lehet végtelen hosszú. Tegyük fel, hogy mégis van egy végtelen  $ak + b$  számtani sorozat, amelynek minden eleme teljes hatvány. Legyen  $c$  az  $a$  és  $b$  legnagyobb közös osztója és  $a_0 c = a$ ,  $b_0 c = b$ . Ekkor a  $c(a_0 k + b_0)$  számtani sorozatról van szó, ahol  $(a_0, b_0) = 1$ . Dirichlet tétele alapján  $a_0 k + b_0$  számtani sorozat elemei között végtelen sok prím van. Ha  $a_0 k + b_0 = p$  prím, akkor  $cp$ -nek teljes hatványnak kell lennie; ez viszont csak akkor lehetséges, ha  $p \mid c$ . Mivel végtelen sok  $k$ -ra lesz  $a_0 k + b_0$  prím, azért  $c$ -nek végtelen sok prímmel kell oszthatónak lennie. Ez csak  $c = 0$  esetén következik be, ami ellentmondás, mert  $(a, b) \neq 0$ .

*Pap Gyula* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.)