

Legyen XYZ egy olyan szabályos háromszög, amelynek XY oldala C -re, YZ oldala A -ra, ZX oldala pedig B -re illeszkedik. Mivel a szabályos háromszögek egymáshoz hasonlóak, ezért XYZ területe akkor a lehető legnagyobb, ha oldala – pl. YZ – a lehető legnagyobb.

Mivel Z -ből az AB szakasz 60° -os szögben látszik, ezért Z rajta van az AB szakaszhoz tartozó 60° -os látóköríven. Ugyanígy Y rajta van az AC szakaszhoz tartozó 60° -os látóköríven, a két látókörívet tartalmazó körök A -tól különböző metszéspontja legyen P . Mivel ABC hegyesszögű, ezért P az ABC háromszög belső pontja (1. ábra), továbbá

$$\begin{aligned} \angle APB &< = 180^\circ - \angle AZB < = 120^\circ, \\ \angle APC &< = 180^\circ - \angle AYC < = 120^\circ, \end{aligned}$$

és ezért $\angle BPC < = 360^\circ - \angle APB - \angle APC = 120^\circ$. (P az ABC háromszög ún. *izogonális* pontja, az a pont, amelyből a háromszög mindhárom oldala ugyanakkora szögben látszik.)

Megmutatjuk, hogy YZ akkor maximális, ha merőleges AP -re.

Legyenek Y_1Z_1 az AP -re merőleges, Y_2Z_2 pedig egy AP -re nem merőleges, A -n átmenő szakaszok, amelyek végpontjai az AC , illetve az AB szakasznak 60° -os látóköríven vannak (2. ábra).

Ekkor $\angle AY_1P = \angle AY_2P$ és $\angle AZ_1P = \angle AZ_2P$, mivel azonos íven nyugvó kerületi szögek. Emiatt a Z_1Y_1P és a Z_2Y_2P háromszögek hasonlóak. Mivel $\angle PAY_1 = 90^\circ$, ezért PY_1 a kör átmérője, tehát $PY_1 > PY_2$ (ugyanígy PZ_1 is átmérő a másik látókörben). Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, így $Y_1Z_1 > Y_2Z_2$.

Ezek alapján a szerkesztést a következőképpen végezhetjük: Az AB és az AC oldalakra – kifelé – szabályos háromszögeket szerkesztünk, majd a háromszögek körülírt köreit is megszerkesztjük. A két kör A -tól különböző metszéspontja P . Az AP -re A -ban állított merőleges és a két kör második metszéspontjai Y és Z . A ZB és YC egyenesek metszéspontja X . Az így szerkesztett XYZ háromszög szabályos, mert $\angle AYC = \angle AZB = 60^\circ$ (a szerkesztés miatt), ezért $\angle BXC$ is 60° -os. Területe a lehető legnagyobb, mert a fenti bizonyításból következik, hogy YZ hossza maximális.

Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy $XZ \perp PB$ és $XY \perp PC$ is teljesül, tehát a szerkesztés során az A csúcsnak csak látszólag volt kitüntetett szerepe.

Formanek Csaba (Szeged, Radnóti M. Gimn. III. o.t.) dolgozata alapján

