

Ismert, hogy ha egy háromszög oldalai a , b és c , területe T , a köré írható körének sugara pedig R , akkor $T = \frac{abc}{4R}$. (Ennek az állításnak a részletes bizonyítása megtalálható pl. Hajós György: *Bevezetés a geometriába* című könyvének 150. oldalán, de az 1. ábra segítségével az olvasó is könnyen elvégezheti a bizonyítást. Az ábrán O a köré írható kör középpontja, M pedig az A csúsból induló magasság talppontja. Az $AA'B$ és az ACM háromszögek hasonlóak, ezért $\frac{c}{2R} = \frac{m_a}{b}$, amiből az állítás már következik.)

Legyen az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$ és $BD = f$ (2. ábra). Az ABC , ADC , ABD és BCA háromszögek köré írható köreinek sugarai egyenlők, hiszen mindegyik kör éppen a húrnégyszög köré írható kör; ezért

$$T_{ABC} = \frac{abe}{4R} \quad \text{és} \quad T_{ADC} = \frac{cde}{4R}.$$

(R a húrnégyszög köré írható kör sugara.) Így kapjuk, hogy

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ADC} = \frac{abe}{4R} + \frac{cde}{4R} = \frac{e}{4R}(ab + cd).$$

Másrészt a húrnégyszöget másik átlójával két háromszögre bontva

$$T_{ABCD} = T_{ABD} + T_{CBD} = \frac{adf}{4R} + \frac{bcf}{4R} = \frac{f}{4R}(ad + bc).$$

A húrnégyszög területére felírt kétféle egyenlőségből

$$\frac{e}{4R}(ab + cd) = \frac{f}{4R}(ad + bc).$$

Ezt az egyenlőséget $4R$ -rel szorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.)

