

Jelöljük az $ABCD$ konvex négyszög szögeit α , β , γ , δ -val. Először megmutatjuk, hogy a négyszögnek van olyan oldala, amelynek relatív hossza legalább 1. Tudjuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$. Ezért a négyszögnek van két szomszédos szöge, amelyek összege legfeljebb 180° . (Ha ez nem lenne igaz, akkor $\alpha + \beta > 180^\circ$, $\beta + \gamma > 180^\circ$, $\gamma + \delta > 180^\circ$ és $\delta + \alpha > 180^\circ$ lenne, amiből $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360^\circ$ következne.) Feltehetjük, hogy $\alpha + \beta \leq 180^\circ$. Legyen e a B -n átmenő, AD -vel párhuzamos egyenes (1. ábra). Mivel $ABCD$ konvex és $\alpha + \beta \leq 180^\circ$, azért a négyszög teljes egészében benne van az AD és e párhuzamos egyenesek által határolt sávban. Ezért a négyszög minden AB -vel párhuzamos húrja is benne van a sávban, vagyis minden AB -vel párhuzamos húr legfeljebb olyan hosszú, mint AB . Tehát AB relatív hossza legalább 1.

Most megmutatjuk, hogy a négyszögnek olyan oldala is van, amelynek relatív hossza legfeljebb 1. A négyszögnek van két szomszédos szöge, amelyek összege legalább 180° (ez ugyanúgy bizonyítható, mint az előző esetben a másik irányú egyenlőtlenség). Feltehetjük, hogy $\gamma + \delta > 180^\circ$. Legyen EF a CD -vel párhuzamos olyan húr, amelynek egyik végpontja az AD , másik pedig a BC szakasz belső pontja. (Ilyen húr mindig létezik.) Ekkor a C -n átmenő, AD -vel párhuzamos f egyenes az EF szakaszt egy G pontban metszi (2. ábra), ahol G vagy belső pontja a szakasznak – ha $\gamma + \delta > 180^\circ$ –, vagy $G \equiv F$ – ha $\gamma + \delta = 180^\circ$. A $CDEG$ négyszög paralelogramma, tehát $CD = EG$, vagyis $CD \leq EF$, amiből következik, hogy CD relatív hossza legfeljebb 1.

Megjegyzés. Ha a sokszög oldalait is a sokszög húrjainak tekintjük – feladatunk szövege alapján ezt megtehetjük –, akkor nyilvánvaló, hogy egy oldal relatív hossza nem lehet 1-nél kisebb. Ha maga az oldal a leghosszabb párhuzamos húr, akkor a relatív hossz 1. Ezért feladatunkat úgy is megoldhatjuk, hogy – a megoldás első részével megegyező módon – megmutatjuk egy olyan oldal létezését, amelynek relatív hossza éppen 1.

