

Mivel $x + y + z = 0$, a három szám között biztosan van két olyan, amelyek szorzata nemnegatív. Az egyenlőtlenség szimmetriája miatt feltehetjük, hogy $xy \geq 0$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint $0 < c < a + b$. Ezért

$$(1) \quad c^2 xy \leq (a + b)^2 xy.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenséget $z = -(x + y)$ felhasználásával a következő módon írhatjuk:

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = -a^2 xy - a^2 y^2 - b^2 x^2 - b^2 xy + c^2 xy \leq 0.$$

Vagyis:

$$c^2 xy \leq a^2 xy + a^2 y^2 + b^2 x^2 + b^2 xy.$$

Ehelyett (1) miatt elegendő belátnunk, hogy

$$(a + b)^2 xy \leq a^2 xy + a^2 y^2 + b^2 x^2 + b^2 xy.$$

A bal oldalon elvégezve a négyzetreemelést, majd rendezve az egyenlőtlenséget, kapjuk a

$$0 \leq a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2$$

egyenlőtlenséget, ami nyilvánvalóan igaz.

Ezzel a feladat állítását beláttuk. A felhasznált háromszög-egyenlőtlenség szigorú volta miatt egyenlőség csak akkor állhat, ha x, y, z valamelyike nulla. Ha például $x = 0$, akkor $a^2 yz = 0$ -ból y vagy z nulla, ekkor viszont a harmadik szám is nulla. Egyenlőség tehát csak a triviális $x = y = z = 0$ esetben áll fenn.