

*Megjegyzés.* A megoldás során szomszédosnak olyan mezőket nevezünk, amelyek élben vagy csúcsban csatlakoztak egymáshoz. Amennyiben csak az élben csatlakozást tekintenénk, a feladat triviálisan megoldható lenne (pl. egy-egy sorba minden második helyre csupa sötét, ill. csupa világos figurát téve). Akik így oldották meg a feladatot, nem kaptak pontot.

**Megoldás.** A közölt megoldásban a következő, általánosabb állítást fogjuk igazolni: ha  $n > 2$ ,  $n \neq 4k + 2$ , akkor az  $n \times n$ -es sakktáblára fel lehet állítani  $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$  bábut úgy, hogy ezeknek a fele sötét, a fele világos, és minden figurának ugyanannyi világos szomszédja van, mint sötét, míg  $n = 4k + 2$ -re  $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil + 2$  számút, illetve erre mutatunk egy  $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil - 2$ -es elhelyezést is.

Először igazoljuk azt, hogy  $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$  mindig páros: ha  $n = 2k$ , akkor  $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = 2k^2$ , míg  $n = 2k + 1$  esetén  $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{4k^2 + 4k + 1}{2} \right\rceil = 2k^2 + 2k$ , mindkét esetben páros az eredmény. Ezek után megadunk egy-egy elhelyezési módot az  $n = 3, 4, 5, 6$  esetekre (1. ábra):

Ha  $n > 6$ , akkor az  $n \times n$ -es problémát visszavezetjük egy  $(n-4) \times (n-4)$ -es elhelyezésre. A széleken levő mezőkre (a sarkok kivételével) felváltva két sötét és két világos bábut teszünk (akárcsak az 1. ábra 2. és 5. tábláján): ez lehetséges, hiszen összesen  $4(n-2)$  helyünk van. A következő „egy szélességű keretbe” nem teszünk bábut, majd a fennmaradó  $(n-4) \times (n-4)$ -es táblára elhelyezünk  $\left\lceil \frac{(n-4)^2}{2} \right\rceil$ , illetve  $\left\lceil \frac{(n-4)^2}{2} \right\rceil \pm 2$  bábut. Amennyiben  $n-4 > 6$ , akkor ismét egy kettő szélességű keretet töltünk be, és utána az  $(n-8) \times (n-8)$ -as tábla elrendezését használjuk. Nyilvánvaló, hogy a bábuk elhelyezése így megfelelő.

Egyetlen dolog szorul csak bizonyításra: az, hogy az  $n \times n$ -es táblára valóban annyi bábut tettünk, mint amennyit kellett. Ehhez azt szükséges megmutatni, hogy

$$\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n-4)^2}{2} \right\rceil + 4(n-2)$$

fennáll. Az  $n = 2k$  esetben:

$$\left\lceil \frac{(2k-4)^2}{2} \right\rceil + 4(2k-2) = 2(k-2)^2 + 4(2k-2) = 2k^2 - 8k + 8 + 8k - 8 = 2k^2 = \left\lceil \frac{(2k)^2}{2} \right\rceil,$$

míg az  $n = 2k + 1$  esetben:

$$\left\lceil \frac{(2k-3)^2}{2} \right\rceil + 4(2k-1) = 2k^2 - 6k + 4 + 4(2k-1) = 2k^2 + 2k = \left\lceil \frac{(2k+1)^2}{2} \right\rceil.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

A teljesség kedvéért a dolgozatokból lássunk néhány konkrét elhelyezést az  $n = 8$  esetben (2. ábra):

(Aki legalább egy jó elhelyezést mutatott, megkapta az 5 pontot.)

A 2. ábra legutolsó rajzának kis módosításával látható, hogy még 34 bábu is elhelyezhető. (Esetleg több is?) Egyébként a kitűzéssel egyidőben megjelent „Királyok körei” című cikkből kiderül, hogy nem adható meg olyan megoldás, ahol a bábuk egyetlen zárt láncot alkotnak.

*Szita István* (Körmend, Kölcsey F. Gimn., III. o.t.)     *Nyakas Péter* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o.t.)

dolgozata alapján

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | ● |   |
| ○ |   | ● |
|   | ○ |   |

$n = 3$

$$\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = 4$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | ○ | ● |   |
| ○ |   |   | ● |
| ● |   |   | ○ |
|   | ● | ○ |   |

$n = 4$

$$\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = 8$$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
|   | ● |   | ○ |   |
| ● |   | ○ |   | ● |
|   | ○ |   | ● |   |
| ○ |   | ● |   | ○ |
|   | ● |   | ○ |   |

$$n = 5$$

$$\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = 12$$

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   |   | ● | ● |   |   |
|   | ● | ○ | ○ | ● |   |
| ● |   | ○ | ○ |   | ● |
| ○ |   | ● | ● |   | ○ |
|   | ○ | ● | ● | ○ |   |
|   |   | ○ | ○ |   |   |

$$n = 6$$

$$\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil + 2 = 20$$

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   | ○ | ○ | ● | ● |   |
| ● |   |   |   |   | ○ |
| ● |   |   |   |   | ○ |
| ○ |   |   |   |   | ● |
| ○ |   |   |   |   | ● |
|   | ● | ● | ○ | ○ |   |

$$n = 6$$

$$\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil - 2 = 16$$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | ○ | ● | ● | ○ | ○ | ● |   |
| ○ |   |   |   |   |   |   | ● |
| ● |   |   | ○ | ● |   |   | ○ |
| ● | ○ |   |   | ● |   |   | ○ |
| ○ | ● |   |   | ○ |   |   | ● |
| ○ |   |   | ● | ○ |   |   | ● |
| ● |   |   |   |   |   |   | ○ |
|   | ● | ○ | ○ | ● | ● | ○ |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | ○ | ● |   |   | ○ | ● |   |
| ○ |   |   | ● | ○ |   |   | ● |
| ● |   |   | ○ | ● |   |   | ○ |
| ● | ○ |   |   | ● |   |   | ○ |
| ○ | ● |   |   | ○ |   |   | ● |
| ○ |   |   | ● | ○ |   |   | ● |
| ● |   |   |   |   |   |   | ○ |
|   | ● | ○ | ○ | ● | ● | ○ |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | ○ | ● |   |   | ○ | ● |   |
| ○ |   |   | ● | ○ |   |   | ● |
| ● |   |   | ○ | ● |   |   | ○ |
|   | ● | ○ |   |   | ● | ○ |   |
|   | ○ | ● |   |   | ○ | ● |   |
| ○ |   |   | ● | ○ |   |   | ● |
| ● |   |   | ○ | ● |   |   | ○ |
|   | ● | ○ |   |   | ● | ○ |   |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ● |   |   | ○ | ○ |   |   | ● |
|   |   | ● |   |   | ● |   |   |
|   | ● | ● | ○ | ○ | ● | ● |   |
| ○ |   | ○ |   |   | ○ |   | ○ |
| ○ |   | ○ |   |   | ○ |   | ○ |
|   | ● | ● | ○ | ○ | ● | ● |   |
|   |   | ● |   |   | ● |   |   |
| ● |   |   | ○ | ○ |   |   | ● |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   | ○ | ● |   |   | ● | ○ |   |
| ○ |   |   | ● | ● |   |   | ○ |
| ● |   |   | ○ | ○ |   |   | ● |
|   | ● | ○ |   |   | ○ | ● |   |
|   | ● | ○ |   |   | ○ | ● |   |
| ● |   |   | ○ | ○ |   |   | ● |
| ○ |   |   | ● | ● |   |   | ○ |
|   | ○ | ● |   |   | ● | ○ |   |

|   |   |  |   |   |  |   |   |
|---|---|--|---|---|--|---|---|
| ● | ● |  | ● | ● |  | ● | ● |
| ○ |   |  | ○ |   |  | ○ |   |
| ○ | ○ |  | ○ | ○ |  | ○ | ○ |
| ● | ● |  | ● | ● |  | ● | ● |
| ● |   |  |   | ● |  | ● |   |
| ○ | ○ |  | ○ | ○ |  | ○ | ○ |
|   |   |  |   |   |  |   |   |
|   | ● |  | ○ |   |  |   |   |