

I. megoldás. Feltehetjük, hogy a $CAIJ$ paralelogramma az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint az ABC háromszög, mert a paralelogramma területe nem függ attól, hogy az egyenesek melyik oldalára rajzoljuk. Az AI , illetve CJ párhuzamos és egyenlő BH -val, ezért az $ABHI$, illetve a $BCJH$ négyszögek is paralelogrammák, tehát I , illetve J illeszkedik a HE , illetve HF egyenesekre (1. ábra).

Az $ABDE$ paralelogramma területe megegyezik az $ABHI$ paralelogramma területével, mert AB oldaluk közös, és az ehhez az oldalhoz tartozó magasságaik egyenlők. Ugyanígy, $BCFG$ területe megegyezik $BCJH$ területével. Az ABC háromszög egybevágó az IHJ háromszöggel, ezért $CAIJ$ területe egyenlő a $CBAIHJ$ hatszög területével. E hatszög viszont éppen az $ABHI$ és a $BCJH$ paralelogrammák „összeragasztásával” keletkezett, tehát területe nyilván ezek területének összege.

II. megoldás. A vektoriális szorzat tulajdonságait használva látjuk be az állítást. Tudjuk, hogy

$$T_{CAIJ} = |\vec{AC} \times \vec{CJ}|, \quad T_{ABDE} = |\vec{AB} \times \vec{BD}| \quad \text{és} \quad T_{BCFG} = |\vec{BC} \times \vec{BG}|.$$

$\vec{AB} \times \vec{BD}$ és $\vec{BC} \times \vec{BG}$ egyirányú vektorok, ezért hosszuk összege egyenlő összegük hosszával. Felhasználva az 1. ábra alapján nyilvánvaló vektoregyenlőségeket, valamint azt, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata 0:

$$\begin{aligned} |\vec{AB} \times \vec{BD}| + |\vec{BC} \times \vec{BG}| &= |\vec{AB} \times \vec{BD} + \vec{BC} \times \vec{BG}| = \\ &= |\vec{AB} \times (\vec{BH} + \vec{HD}) + \vec{BC} \times (\vec{BH} + \vec{HG})| = \\ &= |(\vec{AB} \times \vec{BH}) + (\vec{AB} \times \vec{HD}) + (\vec{BC} \times \vec{BH}) + (\vec{BC} \times \vec{HG})| = \\ &= |(\vec{AB} \times \vec{BH}) + (\vec{BC} \times \vec{BH})| = |(\vec{AB} + \vec{BC}) \times \vec{BH}| = |\vec{AC} \times \vec{BH}| = |\vec{AC} \times \vec{CJ}|. \end{aligned}$$

Tehát $T_{ABDE} + T_{BCFG} = T_{CAIJ}$.

Megjegyzés. Ha az ABC háromszögben B -nél derékszög van, továbbá $ABDE$ és $BCFG$ négyzetek, akkor a DBH háromszög egybevágó az eredeti ABC háromszöggel (2. ábra), ezért $CAIJ$ is négyzet. Ebben a speciális esetben feladatunk állítása éppen *Pitagorasz tétele*.



