

Vegyük az a , b egyenespárt a koordinátarendszer tengelyeinek. Legyen az x irányú egységvektor $\mathbf{x}$, az y irányú pedig $\mathbf{y}$. Jelöljük O -val a koordinátarendszer kezdőpontját, F -fel AB felezőpontját, c -vel pedig AB hosszát.

Mivel A és B az x , illetve y tengelyen mozog, azért az $\vec{AO}$, illetve $\vec{OB}$ vektorokat felírhatjuk $2e\mathbf{x}$, illetve $2f\mathbf{y}$ alakban, ahol $2e$ és $2f$ $-c$ és c közé eső valós számok. F az AB felezőpontja, tehát $\vec{OF} = (\vec{OA} + \vec{OB})/2 = e\mathbf{x} + f\mathbf{y}$; ebből $\vec{AF} = f\mathbf{y} - e\mathbf{x}$. Feltehetjük, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású. Ekkor az $\vec{FC}$ az $\vec{AF}$ vektor $+90^\circ$ -os elforgatottja, tehát $\vec{FC} = -f\mathbf{x} - e\mathbf{y}$. Az $\vec{OC}$ -t $\vec{OF}$ és $\vec{FC}$ összegeként kapjuk:

$$\vec{OC} = (e - f)\mathbf{x} + (f - e)\mathbf{y}.$$

Ezért a C mindig rajta van az $y = -x$ egyenletű egyenesen. (Ha ABC negatív körüljárású, akkor $\vec{OC} = (e + f)\mathbf{x} + (e + f)\mathbf{y}$, azaz C az $y = x$ egyenletű egyenesen helyezkedik el.)

Pitagorasz tétele szerint $OA^2 + OB^2 = AB^2$, azaz $4e^2 + 4f^2 = c^2$. Ezt felhasználva:

$$|e - f| = \sqrt{(e - f)^2} = \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef} \leq \sqrt{e^2 + f^2} = \frac{c}{2}.$$

Vagyis C első koordinátája $-\frac{c}{2}$ és $\frac{c}{2}$ közé esik. Könnyen látható, hogy tetszőleges $-\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{c}{2}$ értékhez van olyan e és f , amelyre C első koordinátája éppen x . Tehát C az $y = -x$ egyenletű egyenes $-\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{c}{2}$ feltételekkel meghatározott szakaszán mozog. (Ha ABC negatív körüljárású, akkor az $y = x$ egyenes ugyanezen feltételekkel leírt szakaszán.)

Ugyanezt koordináták nélkül megfogalmazva: C az ABC körüljárásától függően a és b egyik szögfelezőjén mozog úgy, hogy a és b metszéspontjától való távolsága legfeljebb akkora, mint a háromszög befogója.

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.)

Megjegyzés. A példában leírt mozgatóást igen könnyen megvalósíthatjuk egy nagyobb papírra rajzolt két merőleges egyenes és egy derékszögű vonalzó segítségével. Innen könnyen „megsejthető” a keresett mértani hely. (Természetesen a bizonyítást ez nem helyettesíti!)

