

Tegyük föl, hogy valamely $A = 100a + 10b + c$ prímszám esetén van racionális gyök, azaz léteznek olyan p, q egészek, $(p, q) = 1$, hogy

$$a \left(\frac{p}{q} \right)^2 + b \frac{p}{q} + c = 0.$$

Látható, hogy szükségképpen $\frac{p}{q} < 0$, vagyis feltehetjük, hogy $p > 0, q < 0$. Az egyenletet q^2 -tel szorozva:

$$(1) \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

Megvizsgálva a p -vel és q -val való oszthatóságot, azt kapjuk, hogy $q \mid a$ és $p \mid c$, vagyis $a = kq, c = lp$. Mivel $a, c > 0$, azért $k < 0$ és $l > 0$.

(1)-ből kifejezve ap -t és ezt pA -ba írva, majd átrendezve:

$$pA = 100(-bq - lq^2) + 10bp + lp^2 = 10b(p - 10q) + l(p^2 - 100q^2) = (p - 10q)(10b + lp + 10lq).$$

A jobb oldal osztható $(p - 10q)$ -val, így a bal oldal is. Azonban $p - 10q > p$, tehát $p - 10q \nmid p$. Ez azt jelenti, hogy $p - 10q$ és A nem relatív prímek, ami viszont csak úgy lehet – lévén A prímszám –, ha $p - 10q$ osztható A -val. Ám ez lehetetlen, mert

$$A = 100kq + 10b + lp > -10q + p,$$

hiszen $100k \leq -100$, és így $100kq \geq -100q > -10q$, valamint $lp \geq p$. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezhet olyan háromjegyű prímszám, amelynek a, b, c jegyeire az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek lenne racionális megoldása.

Megjegyzés. A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva is célhoz érhetünk: abból ugyanis látható, hogy $b^2 - 4ac$ négyzetszám kell legyen. Ez pedig viszonylag egyszerűen végignézhető az összes háromjegyű prímszámra.