

Először az a) részt igazoljuk. Mivel $i \leq 2n$ -re $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{2n}$, így

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

és $n \geq 2$ esetén szigorú egyenlőtlenség áll.

Ezt az eredményt felhasználva már könnyen megválaszolhatjuk a b) rész kérdését. Az n helyébe 2^0 -t, 2^1 -t, \dots , 2^l -t téve,

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^l+1} + \dots + \frac{1}{2^{l+1}} > \frac{1}{2}.$$

Legyen ezek után $n = 2^k$, ekkor

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^l+1} + \dots + \frac{1}{2^{l+1}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) > \\ &> 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

A $k = 2 \cdot 10^{1995} - 1$ választással ez éppen azt jelenti, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > 10^{1995}.$$

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Belátható az is, hogy az $\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ összeg n -ben monoton növekvő, és határértéke $\ln 2 \approx 0,693$ (vagyis az n növelésével az összeg értéke mind jobban megközelíti $\ln 2$ -t).

Az $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ún. harmonikus sorra pedig az igaz, hogy értéke körülbelül $\ln(n+1)$, ami szintén jól mutatja, hogy tetszőlegesen nagy lehet.