Sajnos kimaradt a feladat szövegéből az a feltétel, hogy x és y pozitív számok. Enélkül elég könnyű az állítást cáfolni: az $x = -6$, $y = 7$ választással például

$$(x+y)^3 \mid x^n + y^n$$

teljesül. Aki egy ilyen ellenpéldát beküldött, természetesen a maximális pontszámot kapta. Sokan viszont megoldották magát az „eredeti" feladatot is; és a továbbiakban mi is erre közlünk egy bizonyítást.

Vezessük be az $x+y=k$, $y=l$ jelölést. Mivel x és y relatív prímek, így k és l is azok. Vizsgáljuk meg, fennállhat-e a

$$k^3 \mid (k-l)^n + l^n$$

reláció.

Legyen először n páros. A binomiális tétel szerint $(k-l)^n+l^n = k^n - nk^{n-1}l + \cdots - nkl^{n-1} + l^n + l^n$, ez akkor osztható k-val, ha $2 \cdot l^n$ is osztható vele. Viszont $(k,\, l) = 1$ miatt ez csak úgy lehet, ha $k \mid 2$. Azonban $k = x + y \geq 1 + 1 = 2$ (felhasználva a pozitivitást), vagyis szükségképpen $x = y = 1$. Beírva ezt az oszthatóságba:

$$2^3 \mid 1^n + 1^n = 2,$$

ami nem teljesül. A páros esetben tehát igaz az állítás.

Legyen ezután n páratlan. Ismét a binomiális tételt használva,

$$\begin{aligned}(k-l)^n + l^n &= k^n - nk^{n-1}l + \cdots - \frac{n(n-1)}{2}k^2l^{n-2} + nkl^{n-1} - l^n + l^n = \\ &= k^3 \cdot M + nkl^{n-2}\left(-\frac{n-1}{2}k + l\right).\end{aligned}$$

Ez akkor osztható k^3-nel, ha $nl^{n-2}\left(-\frac{n-1}{2}k + l\right)$ osztható k^2-nel. Mivel $(k,\, l) = 1$, azért k és $l^{n-2}\left(-\frac{n-1}{2}k + l\right)$ is relatív prímek, tehát szükségképpen $k^2 \mid n$. Ez viszont $k \geq 2$ miatt ellentmond n négyzetmentességének. Ezzel az állítást minden esetben igazoltuk.

Rozmán András (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján