

Ismert, hogy két egyenesre való tükrözés egymásutánja vagy elforgatás, vagy eltolás. Ha az e és f egyenesek az M pontban metszik egymást és az általuk bezárt szög α , akkor az M körüli 2α szögű elforgatás egyezik meg a két tükrözés egymásutánjával (1. ábra); ha pedig a két egyenes párhuzamos és távolságuk d , akkor az egyenesekre merőleges, $2d$ távolságú eltolás lesz a két tükrözés egymásutánjának eredménye (2. ábra). A forgatás, illetve az eltolás irányítása pedig attól függ, hogy e és f közül melyikre tükrözünk először.

Ezért az AB , majd BC -re vonatkozó tükrözések helyettesíthetők egy B középpontú $2ABC\angle$ szögű elforgatással, a CD -re és DA -ra való tükrözések pedig egy D középpontú $2CDA\angle$ szögű elforgatással. Ezek a forgatások helyettesíthetők két-két tengelyes tükrözéssel, és feltehetjük, hogy az egyik tengely mindkét esetben a BD egyenes. Legyen tehát g az a B -n átmenő, h pedig az a D -n átmenő egyenes, amelyekre a g -re, majd BD -re; illetve a BD -re, majd h -ra való tükrözések egymásutánja megegyezik a B középpontú $2ABC\angle$ szögű, illetve a D középpontú $2CDA\angle$ szögű elforgatásokkal. g -t és h -t a 3. ábrán látható szögegyenlőséggel figyelembevételével egyszerűen megszerkesztjük. Így az $ABCD$ négyszög négy oldalegyenesére való tükrözés egymásutánja helyettesíthető a g -re, BD -re, megint BD -re, majd h -re vonatkozó tükrözésekkel. Ez viszont ugyanaz, mintha csak g -re, majd h -re tükrözünk, mert egy egyenesre való kétszeri egymás utáni tükrözés helybenhagyás. Feladatunkat tehát visszavezettük arra, hogy a g -re, majd h -ra vonatkozó tükrözések egymásutánjának hány fixpontja van.

A két tükrözés egymásutánja eltolás, ha $g \parallel h$. Ez pontosan akkor következik be, ha $ABC\angle + CDA\angle = 180^\circ$ (4. ábra), azaz ha $ABCD$ húrnégyszög. Egy (nem identikus) eltolásnak nincs fixpontja, tehát ekkor nincs a síkon olyan pont, amely végül visszajut az eredeti helyére. Ha g és h a P pontban metszi egymást (3. ábra), akkor a transzformáció egy P körüli -360° -nál kisebb szögű – forgatás, aminek P az egyetlen fixpontja.

Összefoglalva tehát a síkon vagy nincs olyan pont, vagy pedig egy olyan pont van, amelyiket az AB , BC , CD és DA egyenesekre egymás után tükrözve végül visszajut az eredeti helyére, attól függően, hogy $ABCD$ húrnégyszög vagy nem.



