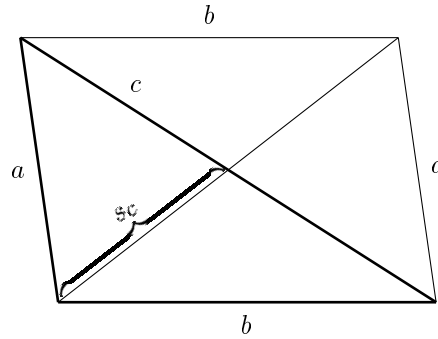


**I. megoldás.** Tükrözzük a háromszöget a  $c$  oldal felezőpontjára. Így egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek szemközti oldalai  $a$  és  $b$ , egyik átlója  $c$ , a másik átlója pedig  $2s_c$  hosszúságú, ahol  $s_c$  az eredeti háromszög  $c$ -hez tartozó súlyvonalának a hossza (1. ábra). Tudjuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, ezért

$$2(a^2 + b^2) = c^2 + 4s_c^2.$$



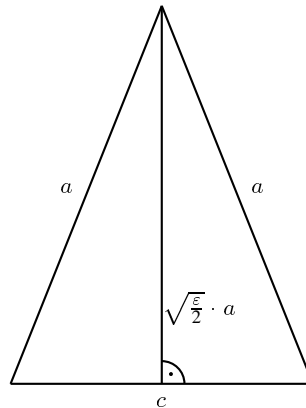
1. ábra

Vagyis  $2(a^2 + b^2) - c^2 = 4s_c^2 > 0$ , amiből rögtön adódik a bizonyítandó állítás. Mivel  $s_c^2$  tetszőlegesen kicsi lehet, azért a fenti összefüggésből az is következik, hogy nem írhatunk 2-nél kisebb szorzót.

Krizsán Árpán (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

**II. megoldás.** A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy  $(a+b)^2 > c^2$ . Ugyanakkor nyilvánvalóan  $(a-b)^2 \geq 0$ . E két egyenlőtlenséget összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2) > c^2.$$



2. ábra

Megmutatjuk, hogy tetszőleges  $0 < \varepsilon < 2$  számhoz van olyan háromszög, amelynek oldalaira

$$(2 - \varepsilon)(a^2 + b^2) = c^2,$$

azaz az eredeti egyenlőtlenségben a bal oldalon nem írhatunk 2-nél kisebb szorzót. Tekintsük azt az egyenlő szárú háromszöget, amelyben  $a = b$ , az alaphoz tartozó magasság pedig  $m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}a$  (2. ábra). Ekkor Pitagorasz tétele szerint  $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 - m^2 = a^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , vagyis  $c^2 = (2 - \varepsilon) \cdot 2a^2 = (2 - \varepsilon)(a^2 + b^2)$ .