

s az x , $y + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ számok legkisebbike, ezért

$$s \leq x, \quad s \leq y + \frac{1}{x}, \quad s \leq \frac{1}{y} \quad (\text{és legalább egy helyen egyenlőség áll}).$$

Az első és a harmadik egyenlőtlenség reciprokból ($x > 0$, $y > 0$ miatt s szintén pozitív)

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{s}, \quad y \leq \frac{1}{s}.$$

Ezeket a másodikba helyettesítve

$$s \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s},$$

vagyis (ismét $s > 0$ alapján)

$$s^2 \leq 2 \quad \text{tehát} \quad s \leq \sqrt{2}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy felveheti-e s ezt az értéket, és ha igen, mikor. Látható, hogy egyenlőség esetén

$$y + \frac{1}{x} = s, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{s}, \quad y = \frac{1}{s},$$

így $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ekkor viszont valóban egyenlőség áll:

$$x = \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az $x_1 = x$, $x_2 = \frac{1}{y}$ jelöléssel ($x_1, x_2 > 0$)

$$s = \min \left(x_1, x_2, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right).$$

Hasonlóan képezhető tetszőleges pozitív $x_1, \dots, x_n$ számokból

$$s_n = \min \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

is, és a fenti megoldás mintájára egyszerűen igazolható, hogy s_n legnagyobb lehetséges értéke $\sqrt{n}$, és ezt az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{n}$ esetben veszi föl.

Németh Balázs (Bp., Szent István Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján