

**I. megoldás.** Konstruálunk egy  $a_1, a_2, \dots$  sorozatot, amely olyan pozitív egészekből fog állni, amelyeknek a tízes számrendszerbeli felírásai csak 1-es és 2-es számjegyekből állnak, továbbá minden  $k$  pozitív egészre az  $a_k$  szám  $k$ -jegyű lesz és osztható  $2^k$ -nal. Ennek a sorozatnak a létezéséből következik a feladat állítása.

Legyen  $a_1 = 2$ ; erre az állítás teljesül. Tegyük fel, hogy már definiáltuk  $a_k$ -t, amely  $k$  jegyű és osztható  $2^k$ -nal. Tekintsük az  $x = 10^k + a_k$  és  $y = 2 \cdot 10^k + a_k$  számokat. Ezek úgy keletkeznek, hogy az  $a_k$  jegyei elé írunk még egy számjegyet. Mindkét szám osztható  $2^k$ -nal, mert  $a_k$  és  $10^k$  is osztható vele. Másrészt  $y - x = 10^k = 2^k \cdot 5^k$  nem osztható  $2^{k+1}$ -nel, tehát  $x$  és  $y$   $2^{k+1}$ -nel osztva különböző maradékot adnak. Egy  $2^k$ -nal osztható szám azonban  $2^{k+1}$ -nel osztva csak 0 vagy  $2^k$  maradékot adhat, így  $x$  és  $y$  közül az egyik  $2^{k+1}$ -nel osztva  $2^k$  maradékot ad, a másik pedig osztható vele. Az utóbbit választva  $a_{k+1}$ -nek, folytatható a sorozat.

*Terpai Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o. t.)

**II. megoldás.** Legyen  $k$  pozitív egész, és írjuk fel azokat az  $k$ -jegyű számokat, amelyeknek minden jegye 1 vagy 2.

111...111, 111...112, 111...121, ..., 222...222.

Azt állítjuk, hogy ezek  $2^k$ -nal osztva csupa különböző maradékot adnak. Mivel a felsorolt számok és a lehetséges maradékok száma is éppen  $2^k$ , ebből következik, hogy minden maradék előfordul, következésképpen a 0 is.

Legyen  $x$  és  $y$  két különböző szám az imént felsoroltak közül. Azt kell bebizonyítanunk, hogy  $x - y$  nem osztható  $2^k$ -nal. Legyen jobbról számolva az  $m$ -edik az első olyan helyiérték, ahol  $x$  és  $y$  jegye nem egyezik meg. A két szám különbsége  $m - 1$  darab 0-ra végződik, az ezeket közvetlenül megelőző jegye pedig 1 vagy 9. Ebből következik, hogy  $x - y = p \cdot 10^{m-1}$ , ahol  $p$  egy páratlan szám. Mivel  $p \cdot 10^{m-1}$  prímtényezős felbontásában a 2 kitevője  $m - 1 < k$ , a szám nem osztható  $2^k$ -nal. Ezzel az állítást beláttuk.

*Visontai Mirkó* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)