

Legyen a téglatest átlója d . A Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Ismeretes, hogy 4-gyel osztva a páratlan négyzetszámok 1-et, a páros négyzetszámok 0-t adnak maradékul.

Tegyük fel először, hogy $a \cdot b$ páratlan. Ekkor a is, b is páratlan, így a^2 és b^2 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Ezért $a^2 + b^2 + c^2$ 4-gyel való osztási maradéka 2 vagy 3 lesz, tehát most $a^2 + b^2 + c^2$ semmilyen c -vel nem lehet négyzetszám, és d ilyenkor nem lesz egész.

Azt kell még bizonyítanunk, hogy ha $a \cdot b$ páros, akkor van megfelelő c .

Ha a , b mindegyike páros, akkor $a^2 + b^2$ osztható 4-gyel, ezért van olyan c egész, amelyre $a^2 + b^2 = 4(c + 1)$, és nyilván c pozitív, hiszen $a^2 + b^2$ legalább 8. Ezzel a c -vel $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4c + 4 + c^2 = (c + 2)^2$, tehát d (pozitív) egész.

Ha a és b közül az egyik páros, a másik páratlan, akkor feltehető, hogy a páros. Ebben az esetben a^2 osztható 2-vel, b^2 pedig 4-gyel osztva 1-et ad maradékul, tehát van olyan c egész, amellyel $a^2 + b^2 = 2c + 1$, és c biztosan pozitív, hiszen $a^2 + b^2$ legalább 5. Erre a c -re $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 2c + 1 + c^2 = (c + 1)^2$, így d most is egész.

Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.) *Tóth Zoltán Péter* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o.t.)