

I. megoldás. Legyen P n -edfokú, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ahol $a_n \neq 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$P(x+1) - P(x) = a_n ((x+1)^n - x^n) + a_{n-1} ((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \dots + a_1 ((x+1) - x)$$

polinom legalább $(n-1)$ -edfokú tagjainak összege

$$a_n ((x^n + nx^{n-1}) - x^n) + a_{n-1} (x^{n-1} - x^{n-1}) = na_n x^{n-1},$$

vagyis ez a polinom $(n-1)$ -edfokú. Esetünkben a $P(x+1) - P(x) = 2x - 1$ polinom elsőfokú, a P polinom csak másodfokú lehet.

Legyen tehát $P(x) = ax^2 + bx + c$. Ekkor

$$P(x+1) - P(x) = (a(x+1)^2 + b(x+1) + c) - (ax^2 + bx + c) = 2ax + (a+b).$$

Ez pontosan akkor egyenlő a $2x + 1$ polinommal, ha $2a = 2$ és $a + b = 1$, vagyis $a = 1$ és $b = 0$. A P polinom tehát $x^2 + c$ alakú lehet. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ilyenekre teljesül az (1) azonosság.

II. megoldás. Könnyen beláthatjuk, hogy az $x^2 + c$ alakú polinomokra (1) teljesül. Megmutatjuk, hogy P csak ilyen alakú lehet.

Tegyük fel, hogy a P polinom eleget tesz az (1) azonosságnak, és legyen $Q(x) = P(x) - x^2 - P(0)$. Erre a polinomra igaz, hogy $Q(0) = P(0) - 0^2 - P(0) = 0$, és

$$Q(x+1) = P(x+1) - (x+1)^2 - P(0) = P(x) + 2x + 1 - (x+1)^2 - P(0) = P(x) - x^2 - P(0) = Q(x)$$

minden x -re.

E két információból következik, hogy minden egész x -re $Q(x) = 0$. Egy polinom értéke azonban csak akkor lehet végtelen sok helyen 0, ha a polinom a 0 polinom, vagyis $Q(x) = 0$. Így tehát $P(x) = x^2 + P(0)$, vagyis P a kívánt alakú.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III o.t.)

Megjegyzés. Többen indoklás nélkül feltételezték, hogy a P polinom csak másodfokú lehet. Ők dolgozatukra 1 pontot kaptak.