

Használjuk az *ábra* jelöléseit. Ismeretes, hogy az a, b, c oldalú háromszög területe $T = \frac{abc}{4R}$, ahol R a körülírt kör sugara. Ezért $R = \frac{abc}{4T}$, és így a bizonyítandó állítás:

$$(1) \quad m \leq \frac{abc}{4T\sqrt{2}}, \quad \text{vagy} \quad 2mT \leq \frac{abc}{2\sqrt{2}}.$$

A tetraéder térfogatát kétféleképpen fölírva: $\frac{T \cdot m}{3} = \frac{d \cdot e}{2} \cdot \frac{f}{3}$, amiből

$$(2) \quad 2mT = d \cdot e \cdot f.$$

Míthogy a D csúcsból kiinduló élek páronként merőlegesek,

$$(3) \quad a = \sqrt{e^2 + f^2}, \quad b = \sqrt{d^2 + f^2}, \quad c = \sqrt{d^2 + e^2}.$$

A (2) és (3) alapján bizonyítandó (1) állítás:

$$d \cdot e \cdot f \leq \frac{\sqrt{e^2 + f^2} \cdot \sqrt{d^2 + f^2} \cdot \sqrt{d^2 + e^2}}{2\sqrt{2}}.$$

Ez így írható:

$$\sqrt{ef} \cdot \sqrt{df} \cdot \sqrt{de} \leq \sqrt{\frac{e^2 + f^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{d^2 + f^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{d^2 + e^2}{2}},$$

ami a sorban megfelelő tényezők közötti egyenlőtlenségek alapján nyilvánvaló. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. Azt is látjuk, hogy egyenlőség csak $d = e = f$ esetében lesz.

Makai Márton (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o.t.)

