

- a) Az $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ egyenletű körön racionális pont nyilván nincs.
- b) A $(\sqrt{2}; 0)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú kör egyenlete: $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$. Legyen ennek egy pontja $\left(\frac{p}{q}; \frac{s}{q}\right)$, ahol p, q, s egészek és $q \neq 0$. A kör egyenletébe behelyettesítve: $\left(\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{q}\right)^2 = 2$, amiből $p^2 + s^2 = 2\sqrt{2} \cdot p \cdot q$. Mivel $\sqrt{2}$ irracionális, ez csak úgy lehetséges, ha $p = 0$ és $s = 0$. Tehát ezen a körön csak egy racionális pont van, a $(0; 0)$.
- c) A $(0; \sqrt{2})$ középpontú, az $(1; 0)$ és $(-1; 0)$ pontokon átmenő körön pontosan 2 racionális pont van, és pedig a megadottak. Ha ugyanis lenne egy harmadik racionális pont is, akkor a kör középpontja is racionális lenne, és ez ellentmondás. A középpontra vonatkozó állításunkat a megoldás d) részében fogjuk igazolni.
- d) Először bebizonyítjuk, hogy ha egy körön három racionális pont van, akkor a középpont is racionális. Írjuk fel ugyanis a három pont meghatározta szakaszok közül kettő felező merőlegesének az egyenletét. Ez egy racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer ad, amelynek – tekintve, hogy a 3 pont nincs egy egyenesen – egyetlen racionális megoldása lesz, ami a kör középpontja. A 3 pont közül legfeljebb 2 lehet tükrös a kör középpontjára, ezért van közöttük olyan, amelyiket a középpontra tükrözve egy újabb racionális pontot kapunk a körön. Ezért nincs olyan kör, amelyiken pontosan 3 racionális pont van.

Gröller Ákos (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Véber Miklós (Veszprém, Lovassy L. Gimn.) megmutatta, hogy ha egy körnek van 3 racionális pontja, akkor végtelen sok ilyen pontja van.