

A megoldáshoz szükségünk lesz az *út* fogalmára. Az $A_1, \dots, A_k$ pontok utat alkotnak, ha $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k-1} A_k$ mindegyike éle a gráfnak. Az A_1 és A_k pontokat az út kezdő- illetve végpontjának nevezzük. Ha az u út végpontja megegyezik a v út kezdőpontjával, akkor uv -vel jelöljük a két út összekapcsolásával keletkező utat.

Ha a gráfban nincs Euler-kör, kész vagyunk; feltételezhetjük, hogy létezik egy E_0 Euler-kör. Mint ismeretes, ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a gráf összefüggő, és minden pont foka páros legyen.¹pl. Reiman István: *A geometria és határterületei* (321–322. o.) vagy Hajnal–Nemetz–Pintér–Urbán: *Matematika (B fakt.) IV. oszt.* 204–206. o. (Tankönyvkiadó, 1982).

A feladatot több esetre bontjuk attól függően, hogy a gráfban milyen fokszámú pontok vannak.

I. eset: ha van legalább hatodfokú pont. Tekintsünk egy ilyen pontot, legyen ez P , a foka $2k$. Az E_0 Euler-kör pontosan k alkalommal megy át ezen a ponton, tehát létezik k darab olyan út, amelynek kezdő- és végpontja is P , továbbá ezek az utak minden élt pontosan egyszer tartalmaznak. Jelölje ezeket az utakat $u_1, \dots, u_k$; jelölje az u_i megfordításával keletkező utat u_i^{-1} . Mivel a gráf egyszerű, ezek az utak legalább három élből állnak, és emiatt a megfordítással keletkező utak biztosan különböznek az eredetiektől. Az $u_1, \dots, u_k, u_1^{-1}, \dots, u_k^{-1}$ utak tehát különbözők. Ekkor viszont fel tudunk sorolni legalább négy különböző Euler-kört: $u_1 u_2 u_3 \dots u_k, u_1 u_2^{-1} u_3 \dots u_k, u_1 u_2 u_3^{-1} \dots u_k, u_1 u_2^{-1} u_3^{-1} \dots u_k$. Az állítás tehát igaz.

II. eset: ha van legalább két negyedfokú pont. Legyen P és Q két negyedfokú pont. Az E_0 kör mindkét ponton kétszer megy át, ez kétféle sorrendben lehetséges: $P - P - Q - Q$ vagy $P - Q - P - Q$. (A többi eset a kör pontjainak ciklikus cseréjével ebbe megy át.)

A $P - P - Q - Q$ esetben az E_0 kört felbonthatjuk az $u_{pp}, u_{pq}, u_{qq}, u_{qp}$ utakra, amelyeknek az indexükben megjelölt pontok a végpontjaik. Most is fel tudunk sorolni négy különböző Euler-kört: $u_{pp} u_{pq} u_{qq} u_{qp}, u_{pp} u_{pq} u_{qp}^{-1} u_{qq}, u_{pp} u_{qp}^{-1} u_{qq} u_{pq}, u_{pp} u_{qp}^{-1} u_{pq}^{-1} u_{qq}$.

A $P - Q - P - Q$ esetben az E_0 kört az $u_{pq}, u_{qp}, v_{pq}, v_{qp}$ utakra bontjuk fel, amelyek közül u_{pq} és v_{pq} P -ből Q -ba, u_{qp} és v_{qp} Q -ból P -be halad. Ebben az esetben is létezik négy különböző Euler-kör: $u_{pq} u_{qp} v_{pq} v_{qp}, u_{pq} u_{qp} v_{qp}^{-1} v_{pq}^{-1}, u_{pq} v_{qp} v_{pq} u_{qp}, u_{pq} v_{qp} v_{qp}^{-1} u_{pq}^{-1}$.

III. eset: ha a gráfban minden pont másodfokú. Ebben az esetben az Euler-kör egyértelmű, legfeljebb csak a körjárási irányát választhatjuk meg. Az Euler-körök száma tehát egy.

IV. eset: ha az egyik pont negyedfokú, a többi pedig (legfeljebb) másodfokú. Legyen P a negyedfokú pont. Ezen az E_0 kör kétszer megy át, ezért P a kört az u és v utakra (körökre) bontja. Tekintsünk egy Euler-kört. Ez szintén tartalmazza az u és v köröket, csupán ezek sorrendje és a körjárási iránya lehet más. A kezdőpont és az irány megválasztásával elérhetjük, hogy először u -t járja be ugyanolyan sorrendben, ezután pedig v -t; itt kétféle körjárási lehetőség. Ez pedig azt jelenti, hogy pontosan két Euler-kör van: uv és uv^{-1} .

Minden esetet megvizsgáltunk, az Euler-körök száma sohasem lehet pontosan három.