A kocka minden csúcsához tartozik (pontosan) egy saroktetraéder. Nevezzük főcsúcsnak a saroktetraéder azon csúcsát, amelyikből a három páronként merőleges él indul ki. Két saroktetraéder főcsúcsa vagy a kocka két szemközti csúcsa, vagy egy lap két szemközti csúcsa, vagy egy kockaél két végpontja lehet. Az első esetet az *1./a ábrán*, a másodikat a *1/b. ábrán* rajzoltuk meg. Nyilvánvaló, hogy ezekben az esetekben a saroktetraéderek közös részének térfogata zérus. Ezért, ha három vagy több saroktetraédert tekintünk, a közös rész térfogata mindig zérus lesz, ugyanis három (vagy több) főcsúcsból mindig kiválasztható kettő, amelyek nem szomszédos csúcsok a kockán.

Ezután elegendő meghatároznunk két szomszédos kockacsúcshoz mint főcsúcshoz tartozó saroktetraéderek közös részének térfogatát. A *1/c. ábrán* ilyen tetraédereket láthatunk. A két főcsík A és D. E két tetraéder egymást metsző élei a kocka lapátlói, amelyek a megfelelő lapközéppontokban metszik egymást. Ezért a közös rész egy olyan tetraéder, amelynek két csúcsa egy kockaél két végpontja, ábránkon A és D, másik két csúcsa a kockaélre illeszkedő két lap központja I és J. Ha a kocka éle a, akkor az AID háromszög területe $\frac{a^2}{4}$, a tetraéder ezen laphoz tartozó magassága $\frac{a}{2}$, tehát a két saroktetraéder közös részének térfogata $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{24}$. Minden élhez tartozik két saroktetraéder $\frac{a^3}{24}$ térfogatú közös résszel, és két közös rész közös pontjainak halmaza legfeljebb egy él. Ezért a keresett térfogat $12\cdot\frac{a^3}{24}=\frac{a^3}{2}$, a kocka térfogatának fele.

Frenkel Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés: A feladat ugyanígy oldható meg tetszőleges paralelepipedonra.

