

**I. megoldás.** Először azt igazoljuk, hogy  $c > 1$ . Ehhez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$c = \frac{b + \frac{1}{b^3}}{2} \geq \sqrt{b \cdot \frac{1}{b^3}} = \frac{1}{b} > 1.$$

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy  $a > 1$ . Ha ugyanis  $a \leq 1$  lenne, akkor

$$(1) \quad b = \frac{a + \frac{1}{a^3}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a^3}} = \frac{1}{a} \geq 1$$

lenne.

A  $c < a$  egyenlőtlenség igazolásához fejezzük ki  $c$ -t is  $a$  segítségével:

$$c = \frac{b + \frac{1}{b^3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{a + \frac{1}{a^3}}{2} + \frac{1}{\left(\frac{a + \frac{1}{a^3}}{2}\right)^3} \right].$$

A bizonyítandó egyenlőtlenségbe behelyettesítve:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{a + \frac{1}{a^3}}{2} + \frac{1}{\left(\frac{a + \frac{1}{a^3}}{2}\right)^3} \right] < a.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt  $4a^3$ -nel, majd  $(a^4 + 1)^3$ -nel, rendezzük a tagokat egy oldalra, majd a kapott kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$\begin{aligned} a^4 + 1 + \frac{16a^{12}}{(a^4 + 1)^3} &< 4a^4 \\ 0 &< (3a^4 - 1)(a^4 + 1)^3 - 16a^{12} \\ 0 &< 3a^{16} - 8a^{12} + 6a^8 - 1 \\ 0 &< (a^4 - 1)^3 (3a^4 + 1). \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség pedig  $a > 1$  miatt triviálisan teljesül.

**II. megoldás.** A  $c > 1$  egyenlőtlenséget az előző megoldás szerint igazoljuk. Az (1) becslést kissé módosítva írjuk fel:

$$ab = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 1.$$

A számtani és mértani közép között csak akkor állhatna egyenlőség, ha  $a^2 = 1$ , vagyis  $a = 1$  lenne. Ebből viszont  $b$  definíciója szerint az is következne, hogy  $b = 1$ , ami ellentmond a  $b < 1$  feltételnek. Ezt az esetet a feladat nem kívánja vizsgálni. Tehát  $ab > 1$  és  $a > \frac{1}{b} > 1 > b$ .

Az  $a > c$  egyenlőtlenség helyett a vele ekvivalens  $ab > bc$  egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$\begin{aligned} ab &> bc \\ \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{2} &> \frac{b^2 + \frac{1}{b^2}}{2} \\ \frac{a^4 b^2 + b^2 - a^2 b^4 - a^2}{2a^2 b^2} &> 0 \\ (a^2 - b^2)(a^2 b^2 - 1) &> 0. \end{aligned}$$

Mivel mindkét tényező pozitív, ez az állítás is igaz.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)