

**1. megoldás.** A  $\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$  azonosság alapján a megoldandó egyenlet így írható:

$$\sin(\pi \cdot \cos x) = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \pi \sin x \right).$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\pi \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} + \pi \sin x + 2 \cdot k \cdot \pi \text{ vagy } \pi \cdot \cos x = \pi - \left( \frac{\pi}{2} + \pi \sin x \right) + 2 \cdot k \cdot \pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \quad (2)$$

A két „vagy”-gyal kapcsolt egyenletet külön-külön kell megoldanunk, ezért mindkettőben  $k$ -val jelölhető a felvett paraméter. Az (1) és (2) egyenleteket a következőképpen írhatjuk:

$$\cos x - 2k - \frac{1}{2} = \sin x, \quad (3) \quad \cos x - 2k - \frac{1}{2} = -\sin x, \quad (4)$$

és e két egyenlet diszjunkciója ekvivalens az eredeti egyenlettel. A (3) egyenletet négyzetre emelve, majd a  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  azonosságot alkalmazva:

$$\cos^2 x + \left( 2k + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \cos x = 1 - \cos^2 x.$$

Ebből

$$(5) \quad 2 \cdot \cos^2 x - (4k + 1) \cos x + \left( 4k^2 + 2k - \frac{3}{4} \right) = 0.$$

Nilvánvaló, hogy a (4) egyenlet négyzetre emelésével ugyancsak (5)-höz jutunk, ezért (3) és (4) diszjunkciója ekvivalens (5)-tel.

(5) diszkriminánsa:  $D = (4k + 1)^2 - 4 \cdot 2 \left( 4k^2 + 2k - \frac{3}{4} \right) = -16k^2 - 8k + 7$ , ami csak  $k = 0$  esetén lesz nemnegatív,

amikor  $D = 7$ . Tehát (5) és egyben az eredeti egyenlet valós megoldásait a  $\cos x = \frac{4k + 1 \pm \sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$  egyenletekből kapjuk. Ebből  $\cos x = 0,9114$  vagy  $\cos x = -0,4114$ , ahonnan  $x = \pm 0,4240 + 2m \cdot \pi$ ; ill.  $x = \pm 1,995 + 2m \cdot \pi$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) az összes megoldások. Az említett ekvivalenciák miatt ezek a megoldások kielégítik az eredeti egyenletet.

*Makai Márton* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

**II. megoldás.** Az első megoldás (3) egyenletéből  $\cos x - \sin x = 2k + \frac{1}{2}$ . Ezt  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -vel szorozva:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x = \frac{4k + 1}{2 \cdot \sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x = \frac{4k + 1}{2 \cdot \sqrt{2}}, \quad \text{azaz} \quad \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{4k + 1}{2 \cdot \sqrt{2}}. \quad (6)$$

Ennek az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha  $\left| \frac{4k + 1}{2\sqrt{2}} \right| \leq 1$ , amiből következik, hogy  $k = 0$ . Ezután (6)-ból:

$$\sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Hasonlóan (4)-ből

$$\sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}.$$

A két utóbbi egyenletből kapjuk a már ismert megoldásokat.

*Lovász Zoltán*, (Bonyhád, Perczel Mór Közg. Szki., IV. o. t.)

*Megjegyzés:* Lovász Zoltán a II. megoldás módszerével megoldotta a  $\sin(a \cdot \cos x) = \cos(b \cdot \sin x)$  egyenletet.