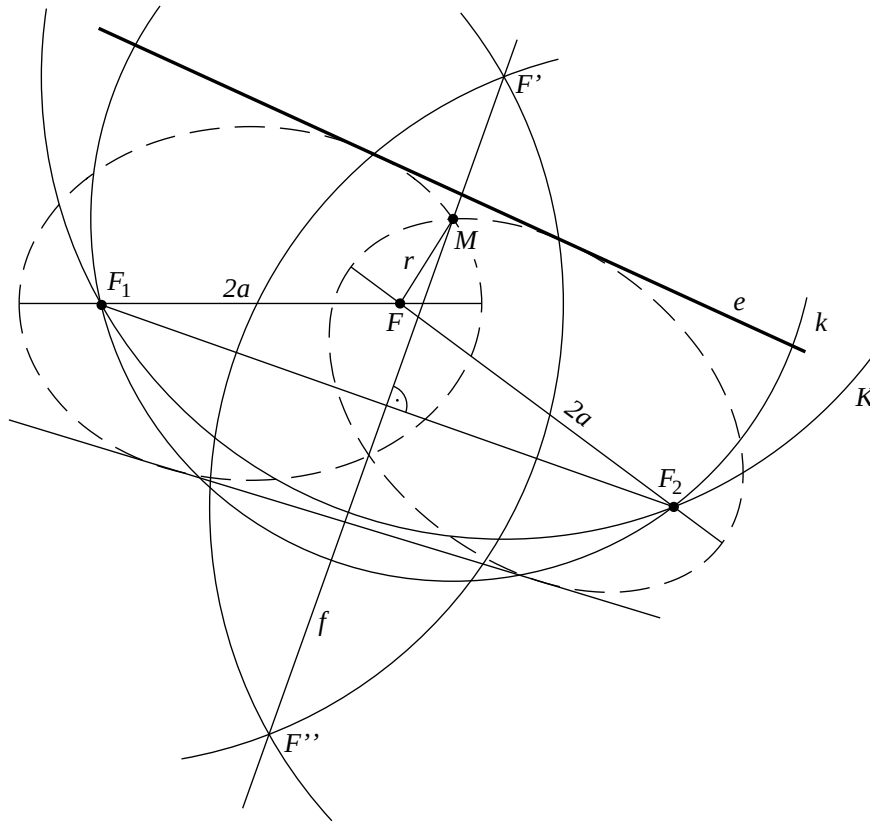


Legyen a két ellipszis közös fókusza F , nagytengelyük hossza $2a$, az adott metszéspont M , a közös érintő e . Az $MF = r$ jelöléssel – az ellipszis definíciója szerint – a másik két fókusz illeszkedik az M körüli $2a - r$ sugarú k körre. Ismeretes továbbá, hogy ha az ellipszis egyik fókuszát tükrözzük az ellipszis valamelyik érintőjére, akkor a tükrökép a másik fókusz körüli $2a$ sugarú körön lesz. Ezért, ha F tükröképe e -re F' , akkor a keresett fókuszok – legyenek ezek F_1 és F_2 – rajta vannak az F' körüli $2a$ sugarú K körön. A feladatnak csak akkor van megoldása, ha k és K metszik egymást, és a közös pontok e -nek ugyanazon oldalán vannak, mint F és M , és ekkor a metszéspontok F_1 és F_2 . Ha k -nak és K -nak nincs közös pontja, az ellipszisek nem léteznek; ha egy közös pont van, akkor a két ellipszis egybeesik, amikor is minden pontjuk és érintőjük közös. Ha valamelyik metszéspont egybeesik F -fel, akkor az egyik ellipszis kör lesz. Ebben az esetben a két alakzat szimmetrikus az ellipszis nagytengelyére, tehát a hiányzó adatok tengelyes tükrözképként szerkeszthetők. Ezután azt mondhatjuk, hogy a két ellipszis adott, hiszen fókuszai és nagytengelyük ismert.

A két ellipszis bármelyik közös pontja az ellipszis definíciója alapján F_1 -től és F_2 -től – tekintve, hogy F közös fókusz – egyenlő távolságra van. Ezért a közös pontok illeszkednek az F_1F_2 szakasz f felező merőlegesére. Ezért elegendő f és az egyik ellipszis közös pontjait megszerkeszteni. Vegyük ehhez például azt az ellipszist, amelynek fókuszai F_1 és F , kistengelyét jelölje b . Tekintsük az ellipszis nagytengelyére vonatkozó $\frac{a}{b}$ arányú merőleges affinitást. Ebben az affinitásban az ellipszis képe a főkör, f képe legyen f' . A főkör és f' közös pontjai legyenek M_1 és M_2 . Az F_1F tengelyű $\frac{b}{a}$ arányú affinitásban M_1 és M_2 egyikének a képe M , a másiké a hiányzó közös pont.



Már korábban megállapítottuk, hogy az F pontnak e -re vonatkozó F' tükröképe az F_1 és F_2 pontoktól $2a$ távolságra van. Legyen az F_1 és F_2 körüli $2a$ sugarú körök másik metszéspontja F'' . Az FF'' szakasz felező merőlegese a hiányzó közös érintő.

A szerkesztés akkor és csak akkor végezhető el, ha a k és K körök metszik egymást, és közös pontjaik, valamint az ugyancsak különböző F és M pontok az e egyenesnek ugyanabban a (nyitott) félsíkjában vannak. Ez esetben a két ellipszis egyértelműen megszerkeszthető, két metszéspontjuk és két közös érintőjük lesz.

Rozsnyai Ádám (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.) és Véber Miklós (Veszprém, Lovassy L. Gimn., III. o.t.)