

Mutatunk egy algoritmust, amelyet követve a bolhát biztosan el tudjuk pusztítani. A módszer azon múlik, hogy a bolha útvonalát „elő lehet írni”: minden pillanatban háromfelé ugorhat, de mi a három lehetséges hely közül kettőt megmérgezhetünk. Tehát ha a bolha ugrása után nem kiáltotta, hogy „NYEKK”, biztos, hogy ezen az útvonalon van. Az útvonalat pedig úgy választjuk, hogy visszatérjen az origóba.

Jelöljük a három vektort, amellyel a bolha elmozdulhat, u_1 , u_2 , u_3 -mal. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$(1) \quad 2u_1 + 99u_2 + 99u_3 = 0.$$

Ha tehát két ugrás az u_1 vektorral történik, 99 ugrás pedig az u_2 , illetve u_3 vektorral, akkor a bolha visszatér az origóba.

Definiáljuk az $A_0, \dots, A_{200}$ pontokat úgy, hogy A_0 az origó legyen,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = u_1, \quad \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_3A_4} = \dots = \overrightarrow{A_{100}A_{101}} = u_2, \\ \overrightarrow{A_{101}A_{102}} = \overrightarrow{A_{102}A_{103}} = \dots = \overrightarrow{A_{199}A_{200}} = u_3 \end{aligned}$$

legyen. Ezeket a pontokat írjuk elő a bolha útvonalának. Az (1) egyenlőség alapján $A_{200} = A_0$, az útvonal körbeér.

Az A_i pontból a u_1, u_2, u_3 vektorok három különböző pontba mutatnak, ezek közül az egyik az A_{i+1} pont. A másik két pontot jelöljük B_i -vel és C_i -vel.

Az első 200 lépésben mérgezzük meg sorban a B_0 és C_0 , B_1 és C_1 , $\dots$, B_{199} és C_{199} pontokat. Azt állítjuk, hogy k perc eltelte után ($0 \leq k \leq 200$) a bolha vagy már elpusztult, vagy az $A_0, \dots, A_k$ pontok valamelyikén tartózkodik. Ezt k szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 0$, akkor állításunk igaz, mert a bolha A_0 -ból indul. Ha pedig $k = m$ lépés után az $A_0, \dots, A_m$ pontok valamelyikén tartózkodik, akkor a következő percben vagy nem ugrik (és akkor ugyanezek a pontokon marad), vagy pedig továbbugrik az $A_1, \dots, A_{m+1}$, $B_0, \dots, B_m$, $C_0, \dots, C_m$ pontok közül valamelyikre. Viszont az $(m+1)$ -edik perc végére megmérgeztük a $B_0, \dots, B_m$, $C_0, \dots, C_m$ pontokat. Ha tehát a bolha életben marad, akkor az $A_0, \dots, A_{m+1}$ pontok valamelyikén van.

A 200-adik perc letelte után a bolha már csak az $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{199} \rightarrow A_0$ körpályán ugrálhat, mert mind megmérgeztük a $B_0, \dots, B_{199}$, $C_0, \dots, C_{199}$ pontokat. Ha a következő 100 percben sorra megmérgezzük a körpálya pontjait, biztosan elpusztítjuk a bolhát.

Rozmán András (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat általánosítása az **N. 56.**, amelynek megoldása a 422. oldalon található.

