Mindkét oldal értékkészlete a nemnegatív számok halmaza, legkisebb értékük 0. Ezt a jobb oldal csak az $x=-\dfrac{1}{3}$ helyen veszi fel, a bal oldal pedig pontosan akkor, ha egyidejűleg

$$a=-x=\frac{1}{3},\qquad b=-2x=\frac{2}{3},\quad \text{és}\quad c=-2x=\frac{2}{3}.$$

Az a, b, c számhármasnak ez az értékrendszere tehát szükséges feltétele annak, hogy az egyenlőség azonosság legyen.

A feltétel egyúttal elegendő is, ugyanis behelyettesítés és kiemelések után az egyenlőséget úgy alakíthatjuk, hogy

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+2^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+2^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=3^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2, \tag{1}$$

ez pedig minden x-re érvényes, akkor is, ha $x+\dfrac{1}{3}\neq 0$, mert $1+2^2+2^2=3^2$.

Megjegyzések. 1. A legtöbb beküldő felbontotta a zárójeleket, ezáltal hosszadalmas munka „szakadt a nyakába”. Egy részük szerencsére érdekes megállapításokhoz juthatott cserébe.

Aki így kezdett a feladathoz, a kívánt azonosság rendezése után a bal oldalon elsőfokú polinomhoz juthatott:

$$2(a+2b+2c-3)x+(a^2+b^2+c^2-1)=0. \tag{2}$$

Ez akkor és csak akkor teljesül minden x-re, ha a zárójelek értéke 0. Ebből egyenletrendszer adódik az a, b, c ismeretlenekre. Kevésnek ígérkezik, hogy három ismeretlenre csak két egyenletünk van, azonban ez az „előítéletünk” csak az ***elsőfokú*** egyenletrendszerekre vonatkozó ismereteinkből táplálkozik. Egyértelmű megoldást fogunk kapni, mégpedig ismét $c=b=\dfrac{2}{3}$, $a=\dfrac{1}{3}$ lesz az egyetlen megoldás.

2. Többen egy harmadik egyenletet „teremtettek” maguknak a $b=c$ feltételezéssel, azzal az indoklással, hogy b és c szerepe „egyenrangú”. Szerencsére a kiszámított értékek is eleget tesznek ennek.

3. Elég sokan észrevették, hogy a (2)-beli együtthatók eltűnése a koordináta-geometriai „nyelvén” tetszetősen értelmezhető az a, b, c tengelyekkel kifeszített térbeli derékszögű koordináta-rendszerben. A második zárójelbeli

$$a^2+b^2+c^2=1$$

követelmény az origó körüli egység sugarú gömb egyenlete, az elsőt pedig átrendezve

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{3/2}+\frac{c}{3/2}=1,$$

annak a síknak az egyenletét látjuk, amely a tengelyek pozitív felét az origótól rendre 3, 3/2, 3/2 egységnyi távolságban metszi. Ez a sík éppen érinti a gömböt az $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ pontban.

4. A sikertelen dolgozatok beküldői közül sokan – indokolatlanul – csak az egész számok körében keresték a megoldást.

5. A fenti meggondolások természetesen csak akkor érvényesek, ha – szokás szerint – a valós számkörben maradunk. Érdemes felfigyelni azonban arra, mi történik, ha kilépünk a komplex számkörbe. A kapott

$$a+2b+2c=3\qquad a^2+b^2+c^2=1$$

egyenletrendszerben tekintsük a-t paraméternek. Ekkor nem túl bonyolult átalakítással azt nyerjük, hogy

$$(b-c)^2=b^2-2bc+c^2=2(1-a^2)-\left(\frac{3-a}{2}\right)^2=-\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2.$$

Így a következő két, paraméteres megoldásrendszer adódik:

$$\left(a,\ \frac{3-a}{4}+\frac{3a-1}{4}i,\ \frac{3-a}{4}-\frac{3a-1}{4}i\right)\quad\left(a,\ \frac{3-a}{4}-\frac{3a-1}{4}i,\ \frac{3-a}{4}+\frac{3a-1}{4}i\right).$$

Ez olyan formájú, mint két egyenes paraméteres egyenlete a térben. Úgy is szoktuk ezt interpretálni, hogy a fent szereplő sík és gömb ebben a két (metsző) egyenesben metszi egymást. Ez nem valami érthetetlen dolog, hiszen egy sík egy forgáskúpot is metszhet metsző egyenespárban. Bizony, a komplex térben nincs sok különbség a kúp és a gömb között.

Nos, mint mondottuk, ez a két egyenes egy pontban metszi egymást (hiszen egy síkban vannak!); érdekes módon ez a metszéspont a valós térbe esik. Ez a pont a sík érintési pontja a gömbön.

Ha a sík metszi vagy „elkerüli” a gömböt, akkor más a helyzet. Nézzük például az $a^2+b^2+c^2=2$ gömböt. Ezt az $a=1$ összefüggéssel adott sík egy körben ($b^2+c^2=1$) metszi. Noha ennek is vannak komplex pontjai, de ez mégis kör marad. Ha a síkot az $a=2$ egyenlet definiálja, akkor a „metsző kör” egyenlete $b^2+c^2=-2$. Ez is kör, de ennek csak komplex pontjai vannak. Az, hogy eredeti példánkban a metszet egy egyenespár volt, annak tudható be, hogy az érintési viselkedés nem „reguláris” (rendes, szabályos), hanem „szinguláris” (szabálytalan, kivételes).